Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
15.01.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Analysis I

Aufgabe 52 – Einfache Riemannsche Summe (Basiswissen):

Berechne für $a < b$ das folgende Integral, indem Du Ober- und Untersummen benutzt.

$$\int_a^b x^2 dx.$$

Hinweis: Benutze eine äquidistante Partition von $[a, b]$ und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe 53 – Wichtige Eigenschaft des Integrals (Basiswissen):

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Zeige, dass ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = 0$.
Gehe dabei wie folgt vor (Du wirst den Zwischenwertsatz und den Satz vom Maximum brauchen):

1. Zeige, dass aus $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ entweder $f > 0$ auf $[a, b]$ oder $f < 0$ auf $[a, b]$ folgt.
2. Zeige, dass aus $f > 0$ auf $[a, b]$ folgt, dass $f \geq \epsilon > 0$.
3. Beweise nun die Behauptung.

Aufgabe 54 – Extrema am Beispiel:

Sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \log x$.

a) Zeige, dass f ein Minimum annehmen muss; genauer, es gibt einen Punkt $x_0 \in (0, 1)$ mit
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$
Hinweis: Zeige $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x \log x) = 0$.

b) Berechne die Ableitung f'. Zeige, dass f hat genau ein Minimum und kein Maximum, indem Du (a) benutzt.

c) Berechne nun mit Hilfe von (b) die Extrema der Funktion
$$g(x) = x^x = e^{x \log x} = e^{f(x)}, \quad x > 0.$$

Aufgabe 55 – Regel von l'Hospital:

Die Regel von L'Hospital ist ein häufig hilfreiches Werkzeug zur Berechnung von Grenzwerten. Ziel dieser Aufgabe ist es, den zugehörigen Satz zu beweisen.
Wir schreiben $x \searrow a$ zur Abkürzung von $x \to a, x > a$; entsprechend $x \nearrow a$.

a) Beweise das folgende Lemma, das wir später benötigen werden.
Lemma. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b')$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.1}$$

b) Berechne mit Hilfe des folgenden Satzes den Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
Theorem.(Regel von l'Hospital) *Seien $f, g \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \searrow a$, aber $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Existiert dann $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt*
$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
und insbesondere existiert der Grenzwert von links.

c) Beweise die Regel von l'Hospital.

Bemerkung: Eine entsprechende Regel gilt auch, wenn $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \searrow a$. Beides gilt auch, wenn $x \nearrow b$ oder $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Aufgabe 56 – Schwierige Riemannsche Summe:

Sei $b \in (0, \pi)$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k := k \cdot \frac{b}{n}$ für $k = 0, \ldots, n$. Wir definieren Treppenfunktionen $\varphi_n^\pm \in T[0, b]$, indem wir $\varphi_n^+(x) := \cos x_{k-1}$ und $\varphi_n^-(x) := \cos x_k$ auf $x \in [x_{k-1}, x_k)$ setzen für $k = 1, \ldots, n$, sowie $\varphi_n^\pm(b) := \cos b$.

a) Warum gilt $\varphi_n^-(x) \leq x \leq \varphi_n^+(x)$ für alle $x \in [0, b]$, sowie $\int_0^b \varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)\, dx \to 0$ für $n \to \infty$?

b) Warum ist $\cos x$ auf $[0, b]$ integrierbar?

c) Zeige $\int_0^b \varphi_n^+(x)\, dx \to \sin b$ für $n \to \infty$.
Diskutiere die auftretenden Grenzwerte bitte sauber. Was hast Du nun gezeigt?
Hinweis: Berechne den Realteil von $\sum_{k=0}^n e^{ikt}$ mit Hilfe der geometrischen Summe.
(*Zwischenergebnis:* $\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \exp\left(i\frac{n}{2}t\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$)

Zahlenliebe

Die 2 und ihr Logarithmus, die liebten einander sehr;
ihr rationales Verhältnis schien ihnen höchste Begehr.
Sie gingen zum strengen Gelehrten, - der sprach: „Ja was fällt Euch denn ein!
Ein rationales Verhältnis zwischen Euch kann nimmermehr sein.
Du bist so ein Transzendenter vom Zahlenproletariat,
sie ist im Primzahlstaate die Schönste, denn sie nur ist grad."
Da rang sie verzweifelt die Hände, doch er umarmte sie schnell:
„Ist's rational auch nicht möglich, so geht es zumindest reell!"