Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
15.01.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 11. Übung zu Analysis I

## Aufgabe 47 – Anwendung der Differentationsregeln (Basiswissen):

a) Differenziere die folgenden Funktionen auf passenden Definitionsbereichen.

$$f(x) = x^x \quad g(x) = \sqrt[x]{x} \quad h(x) = x^{\log x} \quad i(x) = \arccos x$$

b) Der Graph der folgenden Funktion ist als *Gauß-Glocke* bekannt und war auf dem letzten 10 DM - Schein zu sehen. Zufallsvariablen, die diese Funktion als Dichte haben, nennt man *Gauß-* oder *$\mu, \sigma$-normalverteilt.*

$$f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Bestimme die erste und zweite Ableitung von $f_{\mu,\sigma}$.

## Aufgabe 48 – Eulersche Zahl und Logarithmus (Beispiele):

a) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
Gehe dabei wie folgt vor.

(i) Beweise, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend ist und folgere daraus die Konvergenz der Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\lim_{n\to\infty} e_n \le e$.
*Hinweis:* Wir wissen von einem früheren Blatt, dass $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(ii) Schätze $e_n$ so ab, dass Du beim Grenzübergang $\lim_{n\to\infty} e_n \ge e$ erhälst. Schließe nun auf die Behauptung.

b) Benutze (a) um mit Hilfe des Differenzenquotienten und der Funktionalgleichung des Logarithmus zu zeigen, dass

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \text{ für } x > 0.$$

## Aufgabe 49 – Leibnizsche Formel (Standardaufgabe):

Sei $D \subset \mathbb{C}$, ferner seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei $n$-mal differenzierbare Funktionen.

a) Beweise die *Leibnizsche Formel*

$$\frac{d^n}{dz^n}(f \cdot g)(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(z) g^{(k)}(z).$$

*Hinweis:* Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $k \ge 1$.

b) Berechne für $f : z \mapsto z^3 e^z$ die tausendste Ableitung $f^{(1000)}$.

**Aufgabe 50 – Eine wichtige Beispielfunktiony:**

Berechne für alle $n \in \mathbb{N}$ die $n$-te Ableitung an der Stelle Null für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige dazu zuerst, dass die $n$-te Ableitung von $f$ für $x \neq 0$ die Form

$$f^{(n)}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot f(x)$$

für zwei Polynome $p, q$ hat.

**Aufgabe 51 – Hermite-Polynome (Anwendung):**

Die *Hermite-Polynome* $H_n$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Diese Funktionen treten sowohl in der Mathematik bei finiten Elementen, als auch in der Physik als orthogonale Lösungsfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators auf.

a) Berechne die ersten vier Hermite-Polynome. Warum ist $H_n$ für jedes $n$ ein Polynom?

b) Zeige, dass für alle $n \geq 0$ die folgenden Gleichungen gelten.

(i) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$

(ii) $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$

(iii) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$

(iv) $x^2\xi_n(x) - \xi''_n(x) = (2n+1)\xi_n(x)$ für $\xi_n(x) := H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$

„Die Negation einer falschen Aussage ergibt immer eine wahre Aussage!" behauptet ein Mathematikprofessor. „Falsch" meint ein Student. „Begründen Sie das bitte!" verlangt der Professor. „Der Satz *Dieser Satz enthält sechs Wörter* ist falsch, seine Negation *Dieser Satz enthält nicht sechs Wörter* ist aber auch falsch!"