Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.12.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

10. Übung zu Analysis I

Aufgabe 42 – Differenzieren mittels Differenzenquotienten (Basiswissen):

a) Differenziere die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 2z^2 + 7z$.

b) Wo ist $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = |x|^3$ differenzierbar? Ist die Ableitung eventuell stetig fortsetzbar?

c) Betrachte die Funktion $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) = |x|^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
Bestimme die Ableitung von g_k. Ist sie stetig fortsetzbar?

Aufgabe 43 – Landausymbolik (Beispiele):

a) Zeige, dass $\cos x = O(1)$ für $x \to 0$.
b) Zeige, dass die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom wächst und finde dafür das passende Landau-Symbol.
c) Zeige, dass $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$.

Aufgabe 44 – Tangensfunktion (Standardaufgabe):

Die Tangensfunktion wird definiert durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

a) Zeige, dass $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und surjektiv ist. Folgere, dass tan eine Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ hat.
b) Folgere aus den Additionstheoremen für sin und cos das Additionstheorem für tan,

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan y \tan y}, \text{ falls } x, y, x + y \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 45 – Ableitungsoperator (Anwendung):

a) Wir betrachten für differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$

$$c \cdot f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto c \cdot f(z) \text{ und } f + g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z) + g(z).$$

Zeige, dass Ableiten eine lineare Operation ist, d.h. dass

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \text{ und } (f + g)' = f' + g'.$$

b) Sei $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit einem Grad kleiner gleich n (allgemein hat also jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ die Form $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$).

(i) Zeige: $\mathcal{P}_n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit der Basis

$$B := \{p_k : p_k(z) = z^k, 0 \leq k \leq n\}.$$

(ii) Sei $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ die Ableitung, also $D(p) = p'$ für $p \in \mathcal{P}_n$.
Bestimme die Matrix dieser Abbildung bezüglich B.

Aufgabe 46 – $\varepsilon - \delta$-Kriterium (Wiederholung):

Das $\varepsilon - \delta$-Kriterium wird zwar selten zum Nachweis der Stetigkeit einer konkreten Funktion benutzt, ist aber in abstrakten Kontexten sehr wichtig. Daher wiederholen wir es an dieser Stelle:
Zeige, dass die folgenden beiden Funktionen stetig sind. Benutze dafür das $\varepsilon - \delta$-Kriterium. Achte darauf, die Beweise sorgfältig aufzuschreiben, formuliere insbesondere die Anwendung des Kriteriums sehr genau.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x - 2}{x} \qquad g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Vor Jahren hielt ich eine Anfängervorlesung und begann, wie es sich gehört, mit Logik. Zunächst erklärte ich, was man unter einer „Aussage" versteht: Eine Aussage ist ein Text, dessen Inhalt entweder wahr oder falsch ist. Als Beispiel nannte ich den Satz: „Karl ist krank". In diesem Augenblick fiel mir siedendheiß ein, da ich unbedingt einen lebenden Menschen namens Karl brauchte, auf den sich der Satz bezog. Andernfalls konnte man den Satz weder als wahr noch als falsch bezeichnen, d. h. er war gar keine Aussage. Um den Schaden schnell wieder gut zu machen, fragte ich in den Saal: „Ist jemand unter Ihnen, der Karl heißt?" - Sekundenlange Stille! Dann eine Stimme aus dem Hintergrund: „Der ist krank!"