Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.12.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. Übung zu Analysis I

Aufgabe 41 – Logarithmen:

(a) Prüfen Sie, ob die Behauptung $\log z^n = n \log z$ wahr ist für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) In seiner Arbeit „Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen“ aus dem Jahr 1749 reagiert L. Euler auf einen Streit zwischen Leibniz und Johann Bernoulli. Dieser Briefwechsel wurde zwischen dem 16. März 1712 und dem 29. Juli 1713 ausgetragen und 1745 veröffentlicht.

Euler referiert zunächst die verschiedenen Argumente von Leibniz und Bernoulli, um sie dann allesamt in Einwänden als unhaltbar zu erweisen und löst schließlich das Problem mit seiner eigenen Theorie der komplexen Exponentialfunktion. Die folgenden Zitate Eulers sind der Übersetzung aus dem französischem in „Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften“, Band 261, entnommen.

„Auffassung des Herrn Bernoulli:
Herr Bernoulli hat behauptet, dass die Logarithmen der negativen Zahlen gleich denen der positiven Zahlen seien oder dass der Logarithmus der negativen Zahl $-a$ gleich dem Logarithmus der positiven Zahl $+a$ sei. Die Auffassung des Herrn Bernoulli besagt also, dass $\log -a = \log +a$ ist. ...

4. Beweisgrund (des Herrn Bernoulli)
Da es gemäß der Natur der Logarithmen sicher ist, dass der Logarithmus einer beliebigen Potenz p^n dem Logarithmus der Wurzel p selbst, multipliziert mit dem Exponenten n gleich ist oder dass $\log p^n = n \log p$ ist, folgt daraus, dass man, wenn man p durch eine negative Zahl $-a$ ersetzt, $\log(-a)^n = n \log(-a)$ erhalten wird. Es sei $n = 2$; dann wird $\log(-a)^2 = 2 \log(-a)$ sein. Weil aber $(-a)^2 = a^2$ ist, werden wir $\log(-a)^2 = \log a^2 = 2 \log a$ erhalten. Daraus folgt, dass $2 \log(-a) = 2 \log a$ ist, also $\log -a = \log +a$. Dies zeigt sich unmittelbar auf folgende Art: Weil $(-a)^2 = (+a)^2$ ist, wird man $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$ oder $2 \log -a = 2 \log +a$ und folglich $\log -a = \log +a$ erhalten. ...

Auflösung der vorangegangenen Schwierigkeiten.
Wenn man sagt, dass der Logarithmus einer gegebenen Zahl der Exponent einer gewissen, beliebig gewählten Zahl ist, wobei diese Potenz gleich der gegebenen Zahl ist, so scheint es, dass es keinen Zweifel an der Berechtigung dieser Vortellung gibt. Dies ist auch durchaus richtig, jedoch ...“

Schlüpfe an dieser Stelle in die Rolle von L. Euler und setze seine Argumentation fort. Die originellste Lösung erhält einen Preis.

Mitten im mathematischen Vortrag erhebt einer der Anwesenden die Hand und sagt: ,,Ich habe zu dem, was Sie hier erzählen, ein Gegenbeispiel!” Darauf der Vortragende: ,,Egal, ich habe zwei Beweise!”