Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.12.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Übung zu Analysis I

Aufgabe 36 – Cauchy-Produkt (Wiederholung): Zeige, dass

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

indem Du die Reihendarstellungen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

des Sinus und des Cosinus benutzt und die Cauchy-Produkte für $\sin^2$ und $\cos^2$ berechnest.

Aufgabe 37 – Definition von Sinus und Cosinus Hyperbolicus (grundlegend):
Die Hyperbelfunktionen $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind durch

$$\sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad \cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

definiert.

a) Stelle sinh und cosh als Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dar.
b) Skizziere den Graph der beiden Funktionen für reelle x unter Benutzung von Symmetrieeigenschaften sowie dem Verhalten für $|x| \to \infty$.
c) Zeige, dass sinh und cosh stetig sind. Warum konvergieren sie auf $\mathbb{C}$?

Aufgabe 38 – Eigenschaften der Hyperbelfunktionen (Basiswissen):

Seien sinh und cosh wie in Aufgabe 37.

a) Zeige, dass $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Zeige, dass $(\sinh(z) + \cosh(z))^n = \sinh(nz) + \cosh(nz)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$.
c) Drücke $\sinh(2x)$ mittels $\sinh x$ und $\cosh x$ aus.
d) Zeige, dass sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton ist, und folgere daraus, dass es eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von sinh gibt. Zeige, dass $\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
Hinweis: Setze $\exp(x) = \sinh x + \cosh x$ in (a) ein.

Aufgabe 39 – Knobelaufgabe I:

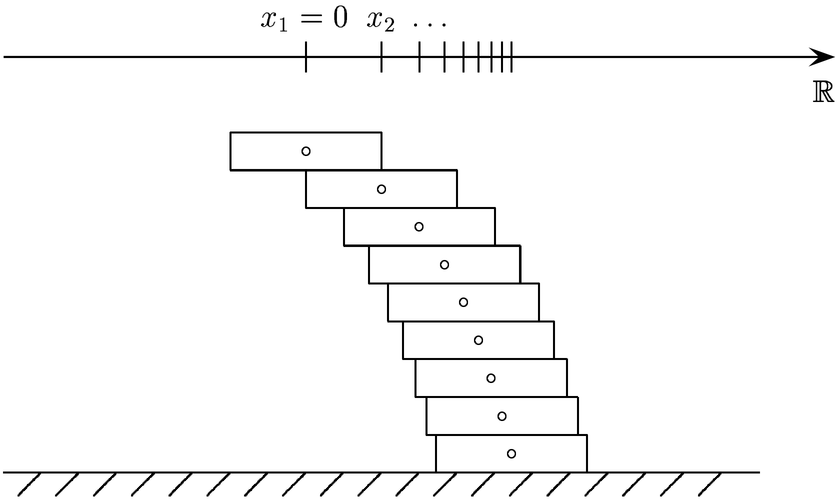
Wir wollen Ziegelsteine so aufschichten, dass die seitliche Verschiebung maximal wird, wie es in der nachfolgenden Zeichung gezeigt wird.
Wir interessieren uns für die Frage: Wie weit kann der Turm zur Seite reichen?
Im Bild ist der Schwerpunkt von jedem Ziegelstein markiert. Sei x_k die horinzontale Komponente des Schwerpunkts des k-ten Ziegelsteins. Wir nehmen an, dass jeder Stein die Länge 2 hat.

(i) Betrachte den ganzen Turm. Berechne den Schwerpunkt M_n der oberen n Steine. *Hinweis:* $M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ für n Massestücke der Masse m_i am Ort r_i für $1 \leq i \leq n$

(ii) Jetzt nimm an, die Seitwärtsverschiebung sei maximal, d.h. M_n ist genau über dem Rand des $(n+1)$-sten Steins. Welche Gleichung bekommst Du für x_{n+1}?

(iii) Berechne x_2, x_3, x_4 (und vielleicht x_5).

(iv) Rate eine explizite Formel für x_n und beweise sie.



Aufgabe 40 – Knobelaufgabe II:

Wir schreiben die Zeit des kalten Krieges zwischen Ost und West und befinden uns in einem entlegenen, höchst geheimen Forschungslabor der ehemaligen Sowjetunion. Der KGB hat sich zur Überwachung der Wissenschaftler ein neues Verfahren einfallen lassen: Jedem Wissenschaftler, der unter Spionageverdacht steht, wird ein Peilsender zugesteckt. Es ist den Wissenschaftlern nicht möglich, die Existenz eines solchen Senders an sich selbst durch bloßes Sehen, Ertasten oder Ähnliches zu registrieren. Umgekehrt erkennen sie aber bei allen anderen Wissenschaftlern die Existenz eines Peilsenders sofort. Generell ist es den Wissenschaftlern verboten, auf irgendeine Weise Informationen über die Peilsender weiterzugeben. Sollte ein Träger eines Senders eines Tages auf irgendeinem Weg doch erfahren, dass er unter Verdacht steht, so verschwindet er in der darauffolgenden Nacht.
Ein Major des KGB inspiziert die Forschungsstätte und verabschiedet sich alsbald von den Wissenschaftlern mit der Bemerkung, dass es, wie überall, leider auch hier Verräter gebe. In den darauffolgenden sieben Nächten setzen sich insgesamt sieben Forscher ab. Was geschieht in der achten Nacht?

Statistiker haben herausgefunden, dass vier von drei Deutschen die Prozentrechnung nicht beherrschen.