Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
11.12.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zu Analysis I

Aufgabe 31 – ε-δ-Kriterium (Standardaufgabe, leicht):

Zeige mit dem ε-δ-Kriterium, dass die folgenden Funktionen stetig sind.

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$

c) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-2}$

Aufgabe 32 – Lipschitz-Stetigkeit (wichtiger Begriff):

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in D$$

gilt. Beachte dabei, dass die Zahl L von f abhängen darf, von x und y ist sie aber unabhängig!

a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeige, dass f stetig ist.

b) Gib eine stetige Funktion f an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

c) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeige, dass die Funktion

$$f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 33 – Grenzwerte (wichtig):

Berechne die folgenden Grenzwerte für $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{z\to 1, z\neq 1} \frac{z^3 + z - 2}{z - 1} \qquad \lim_{z\to a, z\neq a} \frac{z^n - a}{z - a} \qquad \lim_{x\to 0, x>0} x^a \qquad \lim_{x\to 0, x>0} x \log x$$

Aufgabe 34 – noch einmal die Exponentialreihe (Werkzeug):

a) Beweise mit der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe, dass für $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to 0, z\neq 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

b) Berechne mit a) und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion für $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to a, z\neq a} \frac{e^z - e^a}{z - a}.$$

Aufgabe 35 – Funktionalgleichung (Anwendung):

Zeige, dass alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

erfüllen, linear sind.

Student: „Können Sie uns zu diesem Beweis auch ein Beispiel vorrechnen?“ Professor: „Mit diesem Beweis habe ich Ihnen bereits alle Beispiele vorgerechnet.“