Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
27.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Analysis I

Aufgabe 26 – Konvergenz von Reihen I (Basiswissen):

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i+n+n\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Aufgabe 27 – Absolut konvergent, konvergent, divergent (Basiswissen):

Entscheide, ob die folgenden Reihen absolut konvergent, konvergent oder divergent sind.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} i^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(17i)^n}{n!}$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^n}{3^n+8} \qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{n}{n+1} \qquad f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n^2-n+1}$$

Aufgabe 28 – Wurzelkriterium (ein weiteres Konvergenzkriterium):

a) Beweise den folgenden Satz.
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Falls es ein $0 \le q < 1$ gibt und ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für alle $n \ge N$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Hinweis: Benutze die geometrische Reihe.

b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Reihen konvergieren.

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \qquad 2.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$$

c) Finde absolut konvergente Reihen, auf die das Wurzelkriterium bzw. das Quotientenkriterium nicht anwendbar ist.

Aufgabe 29 – Konvergenz von Reihen II (Standardaufgabe):

a) Berechne die Grenzwerte der folgenden Reihen.

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3i)^n+5}{4^n} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Hinweis zu 2.: Zerlege in eine Summe.

b) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{3^{n+2}} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n}$$

c) Gegeben sei die alternierende Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots.$$

1. Warum ist das Leibnitzkriterium auf diese Reihe nicht anwendbar?
2. Zeige, dass die Reihe divergiert.

Aufgabe 30 – Zetafunktion (Exkurs, nicht leicht):

Betrachte die Zeta-Funktion aus der Vorlesung mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \geq 2 \text{ und } p \text{ ist prim}\}$.
Zeige, dass für alle $s > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Hinweis: Entwickle $(1-p^{-s})^{-1}$ in eine geometrische Reihe und zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}, p \leq m} \frac{1}{1-p^{-s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Nutze dazu aus (ohne Beweis), dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ auf genau eine Art und Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann,

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l} \text{ für } l, k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N},\ \ p_1, \ldots, p_l \in \mathcal{P}.$$

Jemand, der mit einem Heißluftballon unterwegs ist und sich verirrt hat, möchte wissen, wo er sich denn nun befindet. Er sieht von oben jemanden auf einem Feld stehen und lässt heiße Luft ab, um ihn Fragen zu können, wo er nun sei.
Ballonfahrer: „Können Sie mir sagen, wo ich bin?"
Nach einiger Zeit kommt die Antwort zurück: „In der Gondel eines Heißluftballons."
Ballonfahrer ruft zurück: „Sie sind sicher ein Mathematiker. Erstens hat es etwas gedauert, bis die Antwort kam, zweitens ist die Antwort vollkommen richtig und drittens kann ich mit der Antwort überhaupt nichts anfangen."
Darauf der Mathematiker: „Und Sie sind gewiss ein Manager. Erstens wissen Sie weder, wo Sie sind noch wohin sie fahren, zweitens sind Sie aufgrund einer großen Menge heißer Luft in Ihre jetzige Position gekommen und drittens erwarten Sie von den Leuten unter Ihnen, dass sie Ihre Probleme lösen."