Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
20.11.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Übung zu Analysis I

Aufgabe 21 – Teilfolgenbegriff (wichtig für alle):

a) Bestimme von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen, die gegen unterschiedliche Werte konvergieren,

$$a_n = \frac{1 + i^n n^2}{2 + 3n + n^2}.$$

b) Gib eine Folge an, die 8 konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten hat und die Du dennoch ohne Fallunterscheidungen in der Definition darstellen kannst. **Hinweis:** Denke komplex!

c) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit der Eigenschaft, dass für jedes $k \geq 2$ die Teilfolgen $(c_{k\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 22 – Reihen (Standardaufgabe, wichtig für alle):

Zeige, dass jede der folgenden Reihen konvergiert und bestimme ihre Grenzwerte.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Aufgabe 23 – Die Eulersche Zahl (grundlegend):

a) Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in N}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert. Gehe dabei in folgenden Schritten vor.
1.Schritt: Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in N}$ beschränkt ist. Weise hierzu jede der folgenden Ungleichungen nach.

$$2 \overset{1}{\leq} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{2}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overset{3}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \overset{4}{\leq} 3$$

Hinweis: Zeige, daß $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ ist.
2. Schritt: Zeige, daß $(a_n)_{n\in N}$ monoton ist.
Hinweis: Die Bernoulli-Ungleichung kann hilfreich sein.
Bemerkung: Der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in N}$ heißt *Eulersche Zahl* e.

b) Berechne mit Hilfe von Aufgabenteil (a) und mit Hilfe der Konvergenzsätze die Grenzwerte der nachstehenden Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} & \text{(ii)} & b_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \\ \text{(iii)} & b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{(iv)} & b_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n. \end{array}$$

Aufgabe 24 – Banachscher Fixpunktsatz
(Anwendung von Cauchyfolgen und geometrischer Reihe):

Es sei $M = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge.

a) Zeige: Existiert ein $C > 0$ und ein $0 < p < 1$ so, dass $|a_k - a_{k+1}| < C \cdot q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Hinweis: Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} C \cdot q^k$ ist eine Cauchyfolge. Begründe die Behauptung, wenn Du den Hinweis benutzt.

b) Zeige: Existiert ein $0 < q < 1$ so, dass $|a_k - a_{k+1}| < q \cdot |a_{k-1} - a_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Beweise nun den *Banachschen Fixpunktsatz:*

   Sei $f : M \to M$ eine Abbildung und $0 < q < 1$. Ferner erfülle f für alle $x, y \in M$ die Kontraktionsbedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|.$$

   Dann gilt

   1. *f besitzt genau einen Fixpunkt $a \in M$ (d.h. $f(a) = a$).*
   2. *Sei $b := b_0 \in M$ beliebig. Dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_{n+1} = f(b_n)$ gegen a.*

   Hinweis: Zeige zunächst, dass $a := \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert. Zeige anschließend mit Hilfe der Kontraktionsbedingung, dass a ein Fixpunkt von f ist, sowie die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

d) Gib eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die die Kontraktionsbedingung erfüllt, sowie ihren eindeutigen Fixpunkt, der laut (c) existiert.

Aufgabe 25 – zwei klassische Texte (besonders für Lehreramtsstudenten):

a) Der folgende Lehrsatz stammt von BOLZANO:
`Wenn eine Reihe von Größen` $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+r}(x), \ldots$`, von der Beschaffenheit ist, dass der Unterschied zwischen ihrem` n`-ten Gliede` $F_n(x)$ `und jedem späteren` $F_{n+r}(x)$`, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man nur` n `groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmal eine gewisse` *beständige Größe*`, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.` (zitiert nach Walter, Analysis I)
Worum geht es in diesem Lehrsatz? Schreibe in unserem heutigen mathematischen Kalkül auf, was der Lehrsatz aussagt.

b) Von Zenon von Elea (ca. 490-430 v. Chr.) ist die folgende Paradoxie überliefert. Angenommen, Achill vereinbart mit einer Schildkröte einen Wettlauf, bei dem der Schnellere (nämlich Achill) dem Langsameren (der Schildkröte) einen Vorsprung gewährt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, Achill laufe zehnmal so schnell als die Schildkröte und diese habe einen Vorsprung von 100 Längeneinheiten. Wenn Achill diese 100 Längeneinheiten zurückgelegt hat, hat die Schildkröte immer noch 10 Einheiten Vorsprung; läuft Achill auch diese 10 Einheiten, so beträgt der Vorsprung der Schildkröte noch eine Einheit, legt er auch dieses Intervall zurück, so ist ihm die Schildkröte noch um ein Zehntel der Einheit voraus und so weiter ins Unendliche. Wenn auch die Differenz kleiner und kleiner wird, so gelingt es dem Verfolger doch nie, die Schildkröte einzuholen. (zitiert nach Röd, Die Geschichte der Philosophie der Antike 1)

1. Welche Antwort würdest ein heutiger Mathematiker - geübt im Umgang mit unendlichen Reihen (zum Beispiel Du als Hörer der Analysis I) - Zenon geben?
2. Worin liegt die Paradoxie im Kern begründet? Könntest Du Zenon mit Deiner Antwort überzeugen?

Ein Mathematiker, ein Physiker und ein Ingenieur bekommen jeweils 12 Stäbe und ein 100m langen Draht, und sollen damit ein möglichst großes Gebiet abstecken. Der Ingenieur steckt sehr uneffektiv mal hier und mal da einen Stab in die Erde. Der Physiker überlegt und meint er würde mit einem gleichseitigen 12-Eck die größte Fläche abstecken können. Der Mathematiker nimmt die Stäbe, wickelt den Draht um sich und sagt: „Ich bin außen!”