Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
13.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Analysis I

Aufgabe 16 – Konvergenz (Handwerkszeug, wichtig für alle):

a) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert.
Hinweis: Benutze $(1+x)^n \geq \frac{1}{4}n^2x^2$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \geq 0$ und zeige $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.
Benutze dabei (ohne Beweis), dass es für jede positive Zahl $a \in \mathbb{R}$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x^n = a$ gilt.

b) Berechne den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = -2n + \sqrt{4n^2 + 5n + 1}$.
Hinweis: Diese Aufgabe kann man mit einem Trick lösen. Versuche dazu, den Term für b_n mit einem binomischen Ausdruck zu vereinfachen.

Aufgabe 17 – Cauchyfolge, harmonische Reihe (wichtig für alle):

a) Überprüfe, ob die folgenden Kriterien äquivalent zum Cauchykriterium sind.
   1. $\forall\, \epsilon > 0 : |a_n - a_m| > \epsilon$ nur für endlich viele Indexpaare $(m, n) \in \mathbb{N}^2$
   2. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_N - a_n| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N$

b) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (die *harmonische Reihe*) mit

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

keine Cauchyfolge ist.
Hinweis: Finde dafür für laufendes n je zwei Folgenglieder, deren Abstand nicht unter einen bestimmten Wert fällt.

c) Zeige, dass das folgende Kriterium nicht äquivalent zum Cauchykriterium ist.

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N$$

Hinweis: Verwende (b).

Aufgabe 18 – nocheinmal Konvergenz (Standardaufgabe, wichtig für alle):

a) Sei $0 < \alpha < 1$. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt.

$$a_1 := \alpha, \quad a_{n+1} := \frac{2a_n + 1}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

b) Überprüfe, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

$$b_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2 + k}{k^4 + 1}$$

c) Überprüfe, ob die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$c_n := \frac{5in^7(1 + \frac{3i}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3 + 7i)((\frac{n}{i})^5 + \sqrt{3 + 2i + ni})n^2}$$

Aufgabe 19 – Dualbrüche (Beweise leicht, nur (f) knifflig):

Unter einem *Dualbruch* versteht man, analog zu den Dezimalbrüchen, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n := 0, d_1 d_2 \dots d_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{2^k} \text{ mit } n \geq 1 \text{ und } d_k \in \{0, 1\}.$$

a_{n+1} erhält man durch Hinzufügen von d_{n+1}. Man nennt a_n selbst auch eine *endliche 0-1-Folge.*

a) Welche rationale Zahl hat die duale Darstellung 0,101?

b) Zeige, dass a_n immer positiv und rational ist.

c) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

d) Zeige mit Hilfe der endlichen geometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$, dass immer $a_n \leq 1$ gilt.

e) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Welcher Zahl entspricht dann ein Dualbruch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

f) Zeige, dass man jede reelle Zahl x aus dem Einheitsintervall $[0, 1)$ als einen Dualbruch schreiben kann.
Hinweis: Gib ein konstruktives Verfahren an, indem Du überlegst, wie man $d_1, \dots, d_n$ geschickt bestimmt. Was musst Du nun noch zeigen?

Aufgabe 20 – Fibonacci-Folge und Goldener Schnitt (leicht, spezielles Thema):

a) Ein Briefträger steigt täglich eine lange Treppe nach folgendem Muster empor: Die erste Stufe betritt er auf jeden Fall. Von da an nimmt er jedoch nach Belieben entweder eine oder zwei Stufen auf einmal.
Auf wieviel verschiedene Arten kann der Briefträger die letzte Stufe erreichen? Suche eine rekursive Definiton.

Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Wir definieren nun die Quotientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweise nun nacheinander die folgenden Behauptungen.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$

c) $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : \; (a_m < a_n \Rightarrow a_{m+1} > a_{n+1})$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_{2n-1} < a_{2n+1}$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_{2n} > a_{2n+2}$

f) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_{2n-1} < a_{2n}$

g) $\exists\, \Phi_- \leq \Phi_+ \in \mathbb{R} : \; \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \Phi_-, \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \Phi_+$

h) $\Phi_- = \Phi_+ =: \Phi$

i) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Hinweis: Was wird aus der Gleichung aus (b) für $n \to \infty$?

Ein Ingnieur und ein Mathematiker sitzen zusammen in einem Vortrag über Kulza-Klein Theorie, die sich mit 11, 12 und sogar noch höheren Dimensionen beschäftigt. Der Mathematiker genießt die Vorlesung, während der Ingenieur immer verwirrter aussieht. Als der Vortrag zuende ist, hat der Ingenieur schreckliche Kopfschmerzen davon.
Ingenieur: ,,Wie kannst du nur diesen schrecklichen, abgehobenen Vortrag verstehen?"
Mathematiker: ,,Ich stelle mir das ganze einfach vor."
Ingenieur: ,,Wie kannst du dir bloß einen 11-dimensionalen Raum vorstellen???"
Mathematiker: ,,Nun, ich stelle mir einen n-dimensionalen Raum vor und setze dann n gleich 11..."