Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
6.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu Analysis I

Aufgabe 11 – Konvergenz von Folgen I:

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *bestimmt divergent*, wenn es für alle $c > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ stets $a_n > c$ bzw. $a_n < -c$.

a) Gib Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass gilt:
   - $(a_n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
   - $(b_n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.
   - $(c_n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent.
   - $(d_n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.

b) Beweise die offene Behauptung aus der Vorlesung, nämlich dass für eine konvergente komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

Aufgabe 12 – Konvergenz von Folgen II:

a) Benutze die Definition von Konvergenz, um zu zeigen, daß die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := \frac{5n+2}{n} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{(n+2i)^2}{n^3-n+1}$$
konvergieren.

b) Zeige mit Hilfe der Grenzwertsätze, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{2n^3+3in^5}{n^5-in^2+3}$ konvergiert, gib jeweils die verwendeten Sätze an.

c) Zeige, dass die Folgen $(d_n)_n$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$d_n = \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \quad \text{und} \quad e_n = i^n$$
divergieren.

Aufgabe 13 – Konvergenz einer Parameter-abhängigen Folge:

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n(x) = \left(\frac{5x-1}{x^2+1}\right)^n.$$

Bestimme

a) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent ist,

b) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist, aber nicht bestimmt divergent ist,

c) die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 14 – Wahr oder falsch?:

Beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen für komplexe Folgen:

a) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier divergenter Folgen ist ebenfalls divergent.

b) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen 0. Dann konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Aufgabe 15 – Konvergenz des Mittels einer Folge:

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige, daß die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert. (Hinweis: Benutze folgende Aufspaltung der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + \frac{1}{n}(a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n))$$

Wähle hierbei das k geschickt anhand der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

b) Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, daß aus der Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt.

Was ist der Unterschied zwischen einem introvertierten und einem extrovertierten Mathematiker?
Der extrovertierte Mathematiker schaut beim Sprechen auf DEINE Schuhe...