Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.10.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2. Übung zu Analysis I

Aufgabe 6 – Ungleichungen:

Beweise die folgenden Ungleichungen.

a) $p + \frac{1}{p} \geq 2$ für $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$

b) $(1+x)^n \geq \frac{1}{4}n^2x^2$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

Aufgabe 7 – Gruppe und Körper:

Versuche in dieser Aufgabe, die Beweise so einfach wie möglich zu gestalten, indem Du benutzt, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

a) Die Menge $\{10^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung bildet keine Gruppe. Warum nicht? Was ist die kleinste multiplikative Gruppe, die $\{10^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ enthält?

b) Zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ bezüglich der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

Aufgabe 8 – Supremum und Infimum:

a) Bestimme das Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

$$A = \left(\frac{1}{2}, 2\right], \qquad B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Welches Supremum bzw. Infimum ist auch ein Maximum bzw. Minimum?

b) Bestimme Infima, Suprema, Maxima und Minima (sofern sie existieren) der folgenden Mengen

$$A = \left\{(1 + (-1)^n)\frac{n+1}{3n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 \geq 2\}.$$

c) Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zeige:

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Gilt sogar $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$?

Aufgabe 9 – Teilerrelation, Beispiel einer partiellen Ordnung:

Eine Menge $(A, \leq)$, auf der eine Relation $\leq$ definiert ist, die den Axiomen

1. $a \leq a$ für alle $a \in A$
2. $a \leq b$ und $b \leq a$ impliziert $a = b$
3. $\leq$ ist transitiv (d.h. falls $a \leq b$ und $b \leq c$, dann folgt $a \leq c$)

genügt, nennen wir eine *partiell geordnete Menge*.

a) Arbeite heraus, wie sich geordnete und partiell geordnete Mengen unterscheiden.

Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. $x \in A$ heißt *maximales Element*, falls für alle $y \in A$ mit $x \leq y$ gilt, dass $x = y$. Sei nun $B \subseteq A$. $x \in A$ heißt *obere Schranke* für B, falls für alls $y \in B$ gilt, dass $y \leq x$. $x \in A$ heißt *Supremum* von B, falls x eine obere Schranke ist für B und falls für jede andere obere Schranke y für B gilt, dass $x \leq y$.
Wir betrachten nun die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der Relation $m|n :\Leftrightarrow m$ teilt n.

b) Zeige, dass $(\mathbb{N}, |)$ eine partiell geordnete Menge ist.

c) Betrachte die Menge

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 21, 35\}.$$

Bestimme alle maximalen Elemente von A bezüglich der Teilerrelation.

d) Versuche, die Ordung durch einen Graphen zu illustrieren, in dem zwei Elemente a und b aus A genau dann durch eine Kante (Linie) verbunden sind, wenn $a|b$. In diesem Fall soll dann b ,,oberhalb" von a eingezeichnet werden.

Bemerkung: Falls $a|b$ und $b|c$, dann zeichne nur die Kante von a nach b und die Kante von b nach c ein und lasse die durch Transitivität geltende Kante von a nach c weg.

e) Bestimme das Supremum von $A \subseteq \mathbb{N}$ und erweitere den Graphen von A zu einem Graphen von

$$\widetilde{A} := A \cup \{ \text{ Supremum von } A\}.$$

Aufgabe 10 – Knobelaufgabe:

Ein Rechteck wird durch n Geraden in Dreiecke, Vierecke, ... zerlegt. Wie viele Teile entstehen höchstens? Beweise deine Vermutung.
Hinweis: Wieviele Schnittpunkte hat eine neu hinzukommende Gerade höchstens?

Ein Astronom, ein Physiker und ein Mathematiker machten einst Ferien in Schottland. Vom Zugfenster aus sahen sie inmitten einer Wiese ein schwarzes Schaf stehen. ,,Wie interessant", bemerkte der Astronom, ,,alle schottischen Schafe sind schwarz!" Darauf antwortete der Physiker: ,,Nein, nein! Einige schottische Schafe sind schwarz!"
Der Mathematiker rollte seine Augen flehentlich gen Himmel und verkündete dann:,,In Schottland gibt es mindestens eine Wiese mit mindestens einem Schaf, das mindestens auf einer Seite schwarz ist."
(aus ,,Fermats letzter Satz", Simon Singh, Hanser Verlag)