Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.10.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Analysis I

Aufgabe 1 – Vermutung und Induktion:

Finde für das Produkt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

einen möglichst einfachen Ausdruck und beweise Dein Ergebnis mit vollständiger Induktion.

Hinweis: Mit $\prod_{k=n_1}^{n_2} b_k$ wird das Produkt der Elemente b_k für k zwischen n_1 und n_2 bezeichnet.

Aufgabe 2 – vollständige Induktion - wo steckt der Fehler?:

Finde alle Fehler in den folgenden Induktionsbeweisen. Argumentiere sorgfältig.

a) **Behauptung:** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)+1$.
Induktionsanfang: Nachrechnen zeigt, dass die Behauptung für $n = 1$ offensichtlich gilt.
Induktionsannahme: Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ und man nimmt an, dass die Aussage für k gilt. Dies besagt dann also $1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)+1$.
Induktionsschritt von k auf $k+1$: Es gilt $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+1+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)+1$, was zu zeigen war.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Wir behaupten voller Überzeugung: Alle Männer sind charmant!
Als praktizierende Mathematiker wollen wir diese These natürlich auch beweisen.
Induktionsanfang: Wir stellen fest, dass es charmante Männer gibt (man betrachte nur die Menge Deiner männlichen Mathematik-Dozenten).
Induktionsannahme: Jede Menge von k Männern, die einen charmanten Mann enthält, besteht ausschliesslich aus charmanten Männern.
Induktionsschritt von k auf $k+1$: Haben wir nun eine Menge von $k+1$ Männern vor uns, so entfernen wir vorübergehend einen Mann aus der Menge. Nach Induktionsannahme besteht nun die übrige Menge aus lauter charmanten Männern. Bringen wir nun diesen Mann zur Menge zurück und entfernen statt dessen einen anderen, so bleibt nach Induktionsannahme wiederum eine Menge von charmanten Männern zurück, so dass der vorhin entfernte Mann charmant sein muss. So haben wir gezeigt, dass auch jeder Mann aus der Menge mit $k+1$ Männern charmant ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3 – der Umgang mit dem Summenzeichen:

Sei a_k für $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl und sei n durch 4 bzw. i teilbar.
Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich?

a) $\sum_{k=1}^{n} a_k$

b) $\sum_{k=-3}^{n} a_{k+4}$

c) $\sum_{k=-3}^{n-4} a_{k+4}$

d) $\sum_{l=2007}^{n+2006} a_{l-2006}$

e) $\sum_{k=1}^{n/4} a_{4k} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-1} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-3}$

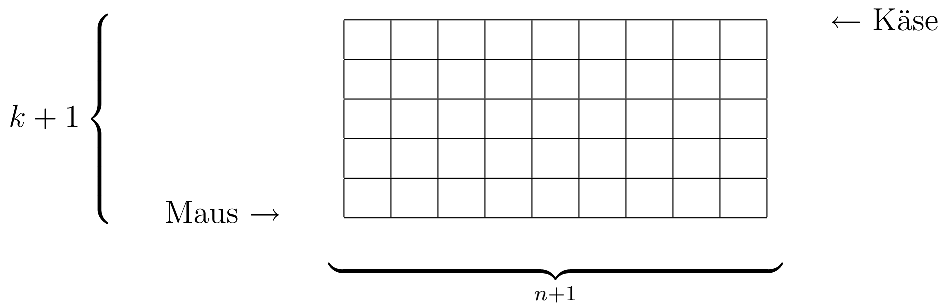
f) $\sum_{k=1}^{n/4} a_{4k} + a_{4k-1} + a_{4k-2} + a_{4k-3}$

g) $\sum_{k=1}^{n/i} \left(\sum_{l=0}^{i-1} a_{ik-l} \right)$

h) $\sum_{k=0}^{n/i-1} \left(\sum_{l=1}^{i} a_{ik+l} \right)$

Aufgabe 4 – Abzählproblem mit Binomialkoeffizienten:

Stelle Dir ein rechteckig umrandetes Gitter aus $n+1$ vertikalen Linien und $k+1$ horizontalen Linien vor (inklusive der Ränder).



a) Am linken unteren Gittereck sitzt eine Maus. Auf wie vielen Wegen kann die Maus zum Käse im rechten oberen Eck kommen, wenn sie nur entlang der Gitterlinien nach oben und nach rechts laufen kann?
Hinweis: Überlege zunächst, wie viele Schritte die Maus bis zum Käse braucht.

b) Begründe unter Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten als Wege im Gitter die folgende Rechenregel für natürliche Zahlen k, m mit $1 \leq k \leq m$.

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}$$

c) Beweise die die Formel und somit das unbewiesene Lemma aus der Vorlesung.

Aufgabe 5 – Binomialkoeffizient und vollständige Induktion:

Zeige mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Aussage gilt,

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i},$$

wobei wir $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ setzen.