STRECKE ODER QUADRAT – WAS IST GRÖSSER?

K. GROSSE-BRAUCKMANN

In dieser Vorlesung möchte ich Ihnen zwei Beispiele von Abbildungen vorstellen, die auf den ersten Blick unmöglich erscheinen.

1. Vorbereitung: Grösse unendlicher Mengen

Die Antwort auf die Titelfrage hängt natürlich davon ab, was wir unter *Größe* verstehen.

Es ist gar nicht so einfach zu sagen, wie groß eine Menge ist, vor allem im Falle unendlicher Mengen. Eine vereinfachende Idee ist es, *gleich groß* festzulegen. Dazu zählen wir eine Menge durch eine andere ab:

Definition 1. Zwei beliebige Mengen M, N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi\colon M \to N$ gibt.

Dabei heißt eine Abbildung *Bijektion*, wenn es für jedes Element aus dem Bild N genau ein Urbild in M gibt.

Beispiele. 1. {Banane, Apfel, Birne} ist gleichmächtig zu {gelb, rot, grün}.
2. Die drei Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$, {Primzahlen} sind gleichmächtig, denn (Tabelle). Sogar $\mathbb{Q} \cap (0,1]$ ist gleichmächtig. Mengen, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind heißen *abzählbar*.
3. Aber $\mathbb{R}$ ist nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ (warum, werden Sie in der Vorlesung noch sehen).

Falls eine Menge M sich bijektiv auf die Teilmenge $\{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ abbilden läßt, so sagt man, sie hat *n Elemente*. Solche Mengen heißen *endlich*, anderenfalls heißt die Menge *unendlich*.

Gibt es noch eine Zwischenstufe in der Mächtigkeit zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$? Genauer: Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die weder eine Bijektion auf $\mathbb{N}$ noch auf $\mathbb{R}$ besitzt? Diese berühmte Frage von Cantor 1878 (Kontinuumshypothese) wurde erst 1938 und 1963 von Gödel und Cohen auf überraschende Weise beantwortet: Die Aussage läßt sich weder beweisen noch widerlegen, wenn man nur die normalerweise in der Mathematik getroffenen Annahmen benutzt (*Zermelo-Frankel-Axiome* und *Auswahlaxiom*); d.h. man verwickelt sich weder in Widersprüche, wenn man *ja* noch wenn man *nein* antwortet. Genaueres finden Sie z.B. unter `en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis` und `en.wikipedia.org/wiki/ZFC`.

2. Beispiel 1: Anzahl von Punkten in Strecke und Quadrat

Nun betrachten wir Einheitsintervall und -quadrat

$$I := \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\}, \qquad Q := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 < x, y < 1\}.$$

Frage: Sind I und Q gleichmächtig?

Natürlich gilt $I \subset Q$ und die Strecke enthält weniger Punkte als das Quadrat. Man kann jedoch die umgekehrte Behauptung zeigen:

Satz. *Es gibt eine Teilmenge $I_T \subset I$ und eine Abbildung $\varphi\colon I_T \to Q$, die jeden Punkt des Quadrats trifft $\varphi(I_T) = Q$.*

D.h. Bijektion sind zu grob, um Dimensionen festzustellen.

Um die Abbildung zu beschreiben, werden wir Dezimalbrüche benutzen. Jede reelle Zahl ist als Dezimalbruch darstellbar, nicht nur $\frac{3}{2}$ sondern auch

$$1{,}111\ldots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9},$$
$$\pi = 3{,}14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \ldots$$

Beweis des Satzes. Wir schreiben jede Zahl aus dem Intervall I als Dezimalbruch,

$$t = 0{,}t_1t_2t_3\ldots.$$

Dabei vereinbaren wir, niemals eine nichtabrechende Kette von Neunern zu benutzen (*Neunerschwanz*). Durch diese Konvention wird die Dezimalbruchdarstellung sogar eindeutig.

Jedem $t \in I$ ordnen wir nun die Dezimalbruchdarstellung eines Punktes $(x, y) \in Q$ zu:

$$\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) := (0{,}t_1t_3t_5\ldots,\ 0{,}t_2t_4t_6\ldots).$$

Beispielsweise wird zugeordnet

$$\varphi\Big(\frac{1}{6}\Big) = \varphi(0{,}1666\ldots) = (0{,}166\ldots,\ 0{,}666\ldots) = \Big(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\Big) \in Q.$$

Wir zeigen jetzt, dass φ surjektiv ist, das heißt, wir bestimmen zu beliebigem $(x, y) \in Q$ ein Urbild $t = \varphi^{-1}(x, y)$. Dazu wählen wir die Dezimalbrüche $x = 0{,}x_1x_2\ldots$ und $y = 0{,}y_1y_2\ldots$ $(x, y) \in Q$ jeweils ohne Neunerschwanz dargestellt. Offenbar ist $t = 0{,}x_1y_1x_2y_2\ldots$ dann die gesuchte Zahl aus I, deren Darstellung ebenfalls keinen Neunerschwanz besitzt, und die auf (x, y) abgebildet wird. Also ist φ surjektiv.

Sämtliche Urbilder von Q bilden eine echte Teilmenge von I, die wir mit I_T bezeichnen. Beispielsweise gilt $0{,}909090\ldots \notin I_T$. Wir erhalten so eine bijektive Abbildung $\varphi\colon I_T \to Q$ mit $\varphi(I_T) = Q$. Also hat das Quadrat Q ebensoviele Punkte wie die Menge $I_T \subset I$. $\square$

3. Beispiel 2: Kurven mit Flächeninhalt

Bijektivität ist einfach zu schwach, um verschiedene Dimensionen unterscheiden zu können. Ein guter Begriff, den Sie aus der Schule für Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen, ist *Stetigkeit.* Welche Charakterisierungen kennen Sie? Vermutlich:
1. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$
2. kleine Schwankungen: ε-δ-Kriterium.
3. Anschaulich: Eine Funktion heisst stetig, wenn man ihren Graphen ohne abzusetzen zeichnen kann.

Wir werden sehen, dass die anschauliche Deutung 3. problematisch ist.

Problem: Gibt es eine stetige Abbildung von I nach Q, die surjektiv ist?

Es war eine erstaunliche Entdeckung, dass es solche Kurven gibt. Der Italiener Peano gab 1890 zuerst eine solche Kurve an, sie heißen daher *Peano-Kurven*. Hilbert gab später ein etwas einfacher zu beschreibendes Beispiel an, das wir nun vorstellen.

Satz. *Es gibt eine stetige Abbildung von $\psi\colon I \to Q$, so dass jeder Punkt des Quadrats getroffen wird ($\psi(I) = Q$).*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine Unterteilung des Quadrats in 4^n Teilquadrate; jedem Teilquadrat der n-ten *Generation* entsprechen also vier Teilquadrate der $(n+1)$-ten Generation. Man kann nun eine Numerierung in der Form von n-stelligen Zahlen mit den vier Ziffern $0, 1, 2, 3$ finden, die folgende Eigenschaften hat:

(i) In jeder Generation haben zwei aufeinanderfolgende Teilquadrate mit aufeinanderfolgenden Zahlen eine Kante gemeinsam. Man kann also einen Weg c_n angeben, der von Quadratmittelpunkt zu Quadratmittelpunkt läuft und sich nie schneidet. Das allein ist einfach (Schlangenlinie), wir verlangen aber noch weiter:

(ii) Bei Übergang zur nächsten Generation wird jedes Teilquadrat in 4 kleinere Teilquadrate unterteilt, deren Numerierung durch Anhängen der Zahlen $0, 1, 2, 3$ gebildet wird.

Was ein Dezimalbruch im Zehnersystem ist, ist ein Quartärbruch im 4-er-System: Eine Folge der Ziffern $0, 1, 2, 3$, z.B.

$$0,30211\ldots = \frac{3}{4} + \frac{1}{4^3} + \frac{2}{4^4} + \ldots$$

Z.B. beschreiben die abbrechenden Quartärbrüche $0,2$ die Zahl $\frac{1}{2}$ und $0,12 = \frac{3}{8}$.

Genausogut wie man jede Zahl aus I als Dezimalbruch darstellen kann, so kann man auch jede Zahl aus I als Quartärbruch darstellen.

Nun können wir ψ hinschreiben:

$$t \in I \leftrightarrow \text{Quartärbruch } 0, t_1 t_2 \ldots \mapsto \text{Punkt in den Quadraten } t_1 t_2 \ldots \in Q$$

Mit dem letzten Schritt meinen wir folgendes: Jede Schachtelung von Quadraten mit Index t_1, $t_1 t_2$, $t_1 t_2 t_3$ usw. definiert genau einen Punkt, der allen diesen Quadraten gemeinsam ist (Quadratschachtelung).

Warum kommt jeder Punkt $(x, y) \in Q$ des Quadrats als Bild eines Quartärbruchs vor? Jeder Punkt liegt in einem Quadrat t_1 der ersten Generation t_2 der zweiten t_3 der dritten, usw. Entsprechend muss man nur noch t wählen!

Die Stetigkeit will ich Ihnen nicht beweisen, man sieht sie aber aus den Kurvenbildern. $\square$

4. Nettos Satz

Interessant wäre es, die Beispiele zu kombinieren. Das ist aber unmöglich:

Satz (Netto 1879)**.** *Es gibt keine bijektive und stetige Abbildung* $\varphi\colon I \to Q$.

Mit etwas höherer Mathematik ist das gar nicht so schwer zu verstehen. Ich nenne Ihnen den Kernpunkt. Nehmen wir an wir hätten eine solche Abbildung. Wenn man aus dem Intervall I einen Punkt herausnimmt erhält man zwei unzusammenhängende Teile, nimmt man aber beim Quadrat den Bildpunkt heraus ist das Ergebnis immer noch zusammenhängend. Man muss nun etwas höhere Mathematik einsetzen, um zu zeigen, dass für stetige bijektive Abbildungen dies nie passieren kann – also gibt es kein solches φ.

5. Ausblick

Warum habe ich dieses Thema gewählt? Vielleicht haben Sie schon ein wenig gemerkt, dass ich Geometrie schätze – das ist schließlich mein Spezialgebiet.

Die dargestellten Beispielabbildungen benutzen Methoden der Analysis. Die Beispiele zeigen, dass man sehr vorsichtig sein muss, wenn man scheinbar anschauliche Dinge darstellt. Die Kraft der Mathematik liegt darin, mit sauber definierten Begriffen arbeiten. Wir werden das tun, vielleicht mehr als Ihnen lieb ist!

Folgende wichtige Stichpunkte der Analysis kamen vor, die uns im kommenden Jahr beschäftigen werden:

- Intervallschachtelungen bzw. Quadratschachtelungen enthalten enthalten jeweils einen Punkt - Charakterisierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$.
- Dezimalbrüche. Ihre Behandlung läuft im Kern auf Reihen hinaus, und zwar auf die geometrische Reihe, die für die Analysis eine entscheidende Rolle spielt.
- Stetigkeit.
- Mehrdimensionale Analysis: 2. Semester.

Mit Nettos Satz sind wir sogar schon etwas weiter. Die *Topologie* ist hier gefordert, es geht z.B. um die Frage: Was ist die Dimension?