Kapitel 5

Zentralprojektion und Rekonstruktion

5.1 Zentralprojektion

(s. LEO S.213)

in Abschnitt 1.1.2 der Einleitung wurden wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert (s. Abb. 5.1).

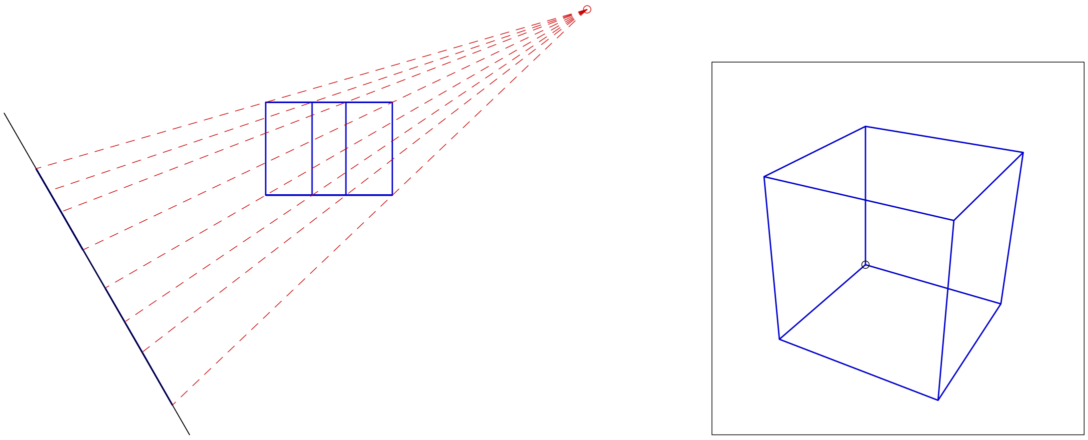

Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man ein so entstandenes Bild mit **ein**em Auge und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion. Eine gute Kenntnis des Prinzips und der Eigenschaften einer Zentralprojektion ist auch für die in der Praxis wichtige Aufgabe der **Rekonstruktion** (s. Abschnitt 5.3) nötig. Dabei versucht man anhand einer Photographie auf die wahren Abmessungen eines Gegenstandes zu schließen.

5.1.1 Definitionen zur Zentralprojektion

Bezeichnungen:

O	:	**Augpunkt**
π	:	**Bildtafel**
H	:	**Hauptpunkt** (Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel.
		Bei Original–Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes.
d	:	**Distanz** (Abstand Augpunkt – Hauptpunkt)
π_1	:	**Standebene** (Grundrissebene)
s	:	**Standlinie** Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel)
h	:	**Horizont** (Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel.
	:	Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.)
π_v	:	**Verschwindungsebene** (Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.)

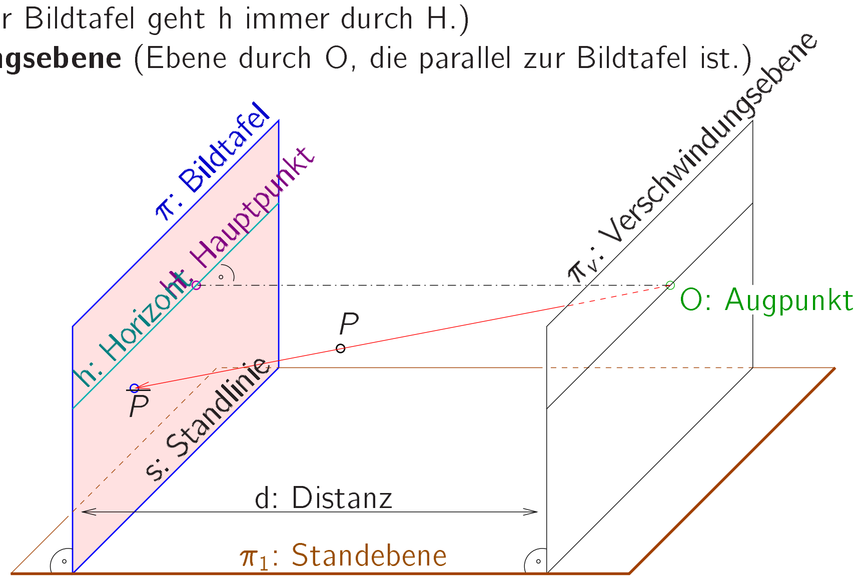

Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Das Bild, das durch Zentralprojektion entsteht, nennt man auch **perspektives Bild**.
Punkte in der Verschwindungsebene haben kein perspektives Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen.
Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.
Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse O-H, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

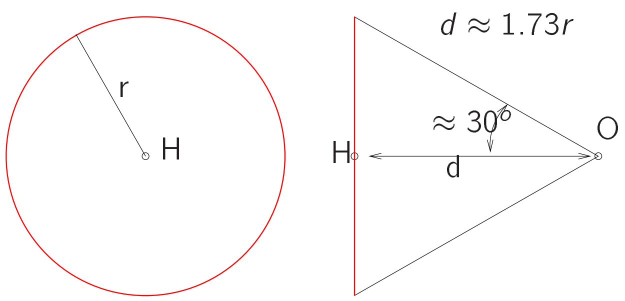

Abbildung 5.3: Sehkreis

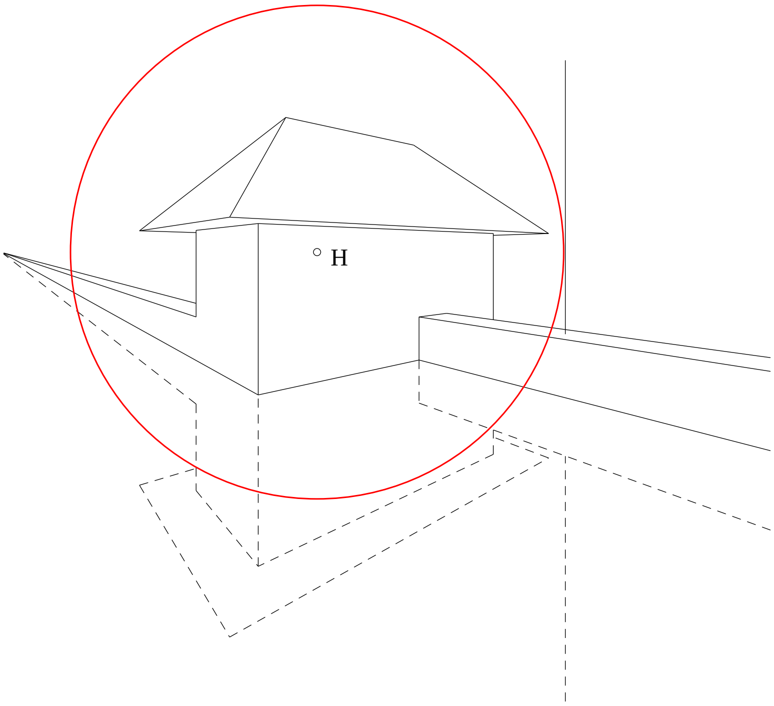

Abbildung 5.4: Zentralprojektion mit Sehkreis: Haus am See

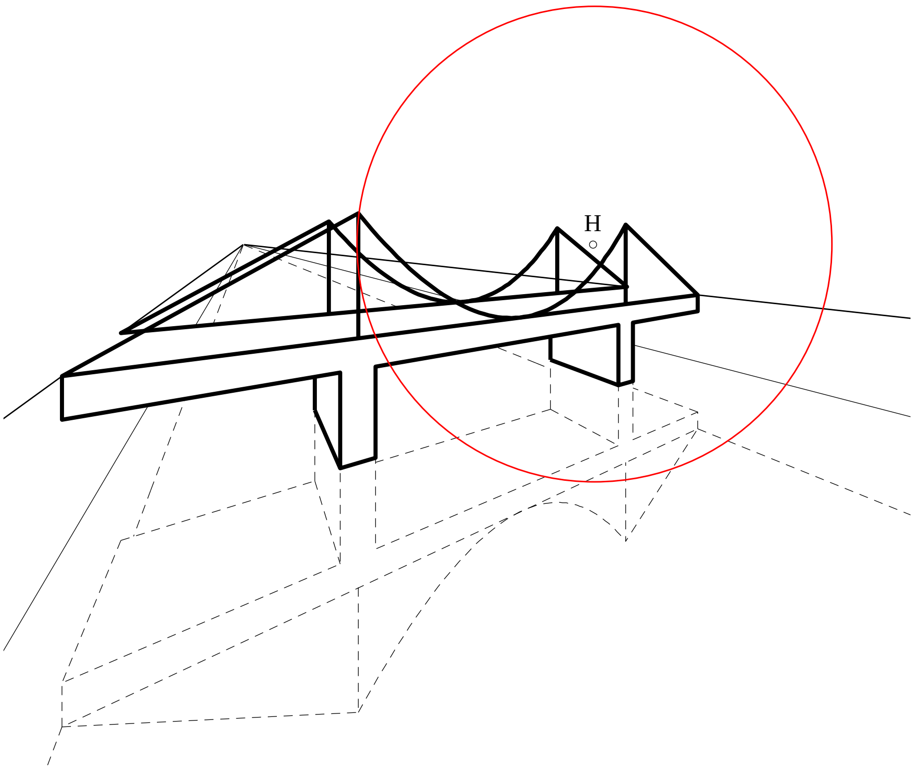

Abbildung 5.5: Zentralprojektion mit Sehkreis: Brücke

5.1.2 Spurpunkt, Fluchtpunkt, Spurgerade, Fluchtgerade

Der Durchstoßpunkt S_g einer Gerade g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g.
Die Bilder einer Schar **paralleler Geraden** sind i.a. nicht parallel. Sie schneiden sich im **Fluchtpunkt** F **der Geradenschar**. Man erhält F als Spurpunkt derjenigen Gerade g_0 der Schar, die durch den Augpunkt O geht.

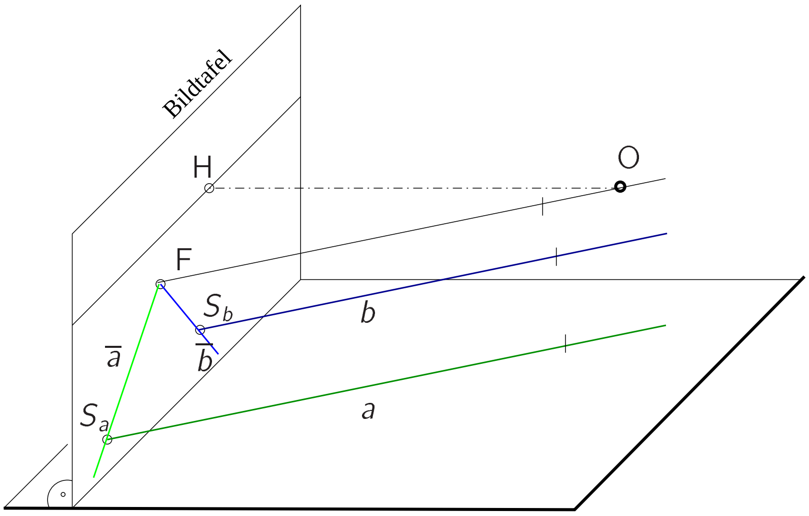

Abbildung 5.6: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

Ist g eine Gerade und F der Fluchtpunkt der durch g bestimmten parallelen Geradenschar, so sagt man "F ist der **Fluchtpunkt** der Gerade g". Es gilt:

1. Geraden, die senkrecht zur Bildtafel sind, heißen **Tiefenlinien**.
2. Fluchpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h.
3. Eine Gerade ist durch ihren Spurpunkt und ihren Fluchtpunkt **bestimmt**, falls diese voneinander verschieden sind.
4. Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden, die zur Bildtafel parallel sind, sind parallel.

Beispiel 5.1 *Abb. 5.7 zeigt Fluchtpunkte paralleler Geraden.*

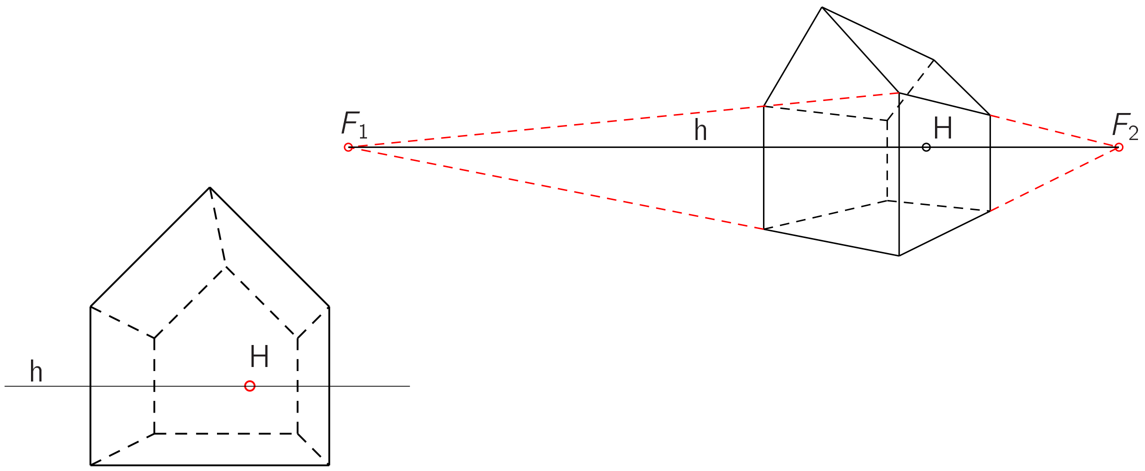

Abbildung 5.7: Fluchtpunkte eines Hauses

Die Schnittgerade einer Ebene ε mit der Bildtafel π heißt **Spurgerade** von ε.
Die Bilder einer Schar **paralleler Ebenen** schneiden sich i.a. in der **Fluchtgerade** (–**linie**) f **der Schar**. Man erhält f als Spurgerade derjenigen Ebene der Schar, die durch O geht (s. Abb. 5.8).

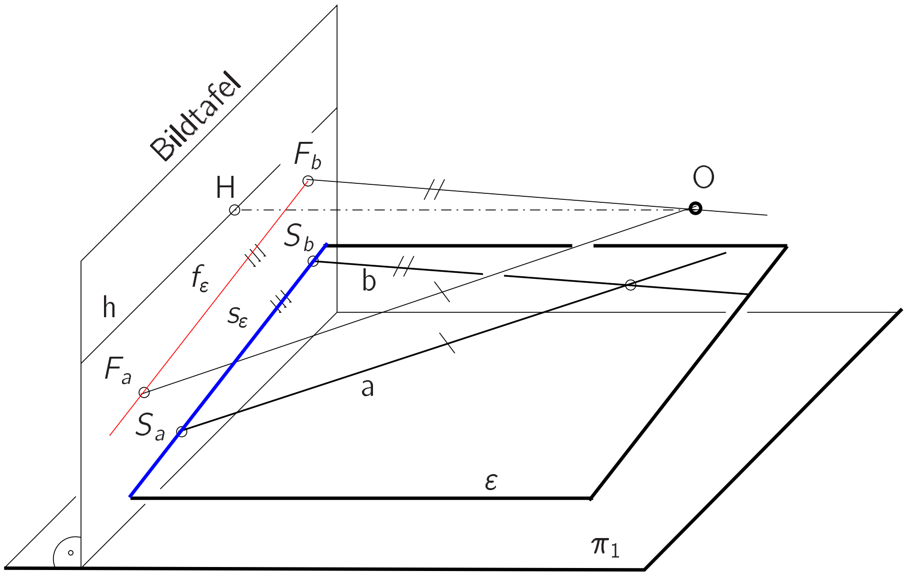

Abbildung 5.8: Flucht– und Spurgeraden einer Ebene

Aufgabe 5.1 *Bestimme die Fluchtgeraden von Ebenen eines Hauses (Abb. 5.9)*

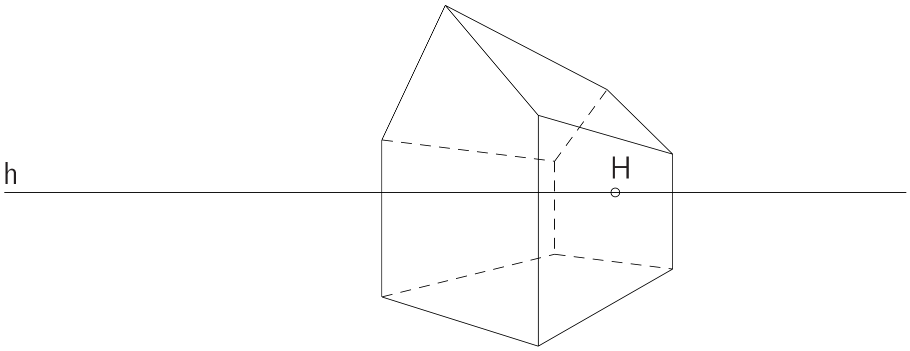

Abbildung 5.9: Fluchtgeraden eines Hauses

5.1.3 Konstruktion perspektiver Bilder bei senkrechter Bildtafel

Steht die Bildtafel **senkrecht**, so gilt:

$\boxed{H \text{ liegt auf dem Horizont } h.}$

Vorgabe	:	a) Punkte und Geraden in Grund– und Aufriss.
		b) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund– und Aufriss.
Gesucht	:	Die perspektiven Bilder der Punkte und Geraden.

Verfahren: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund– und Aufriss. "Festmachen" des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes H. Zeichnen des Horizonts h durch H.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt F_g und Spurpunkt S_g oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen.
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild. (Der horizontale Abstand eines Bildpunktes von H wird aus dem Grundriss, der Abstand vom Horizont h aus dem Aufriss entnommen.)
(F_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Gerade durch O.)

(2) Abbildung eines **Punktes** P:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
a) zeichnen des Projektionsstrahls p in Grund– und Aufriss.
b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
c) zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von H aus Grundriss, Abstand vom Horizont h aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

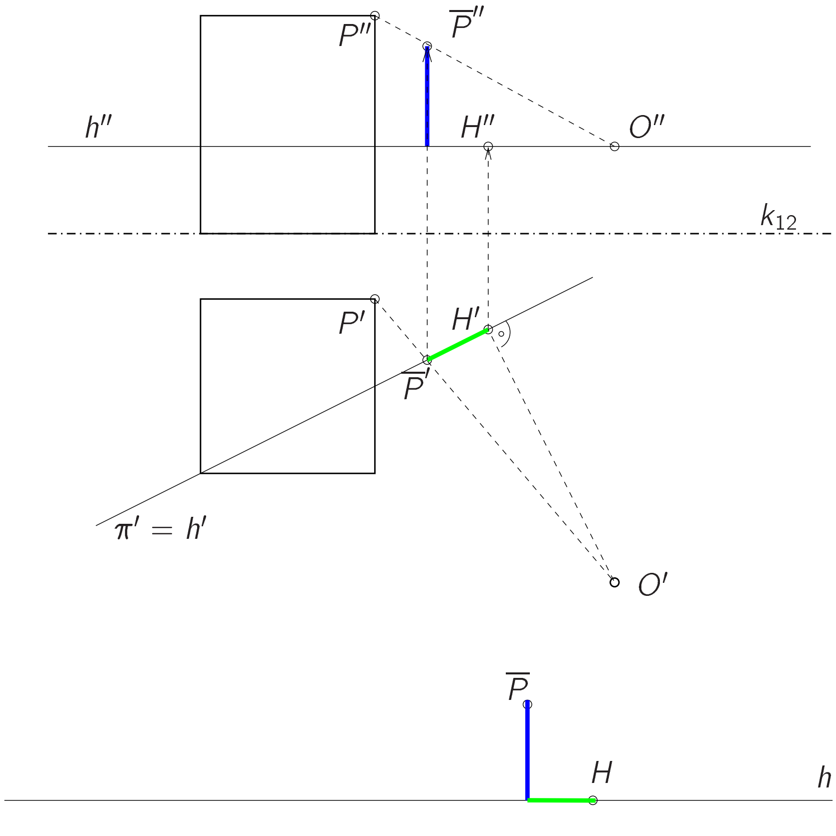

Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird oft die **Architektenanordnung** gewählt: (s. LEO S.221)

Der **Grundriss** wird so unterhalb (oder oberhalb) von dem perspektiven Bild angeordnet, dass

$\boxed{\text{der Horizont } h \text{ parallel zu } \pi' \text{ und } H \text{ auf der Gerade } \overline{O'H'} \text{ liegt.}}$

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes.

Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass

$\boxed{h'' \text{ mit } h \text{ übereinstimmt.}}$

Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.2 *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.11).*

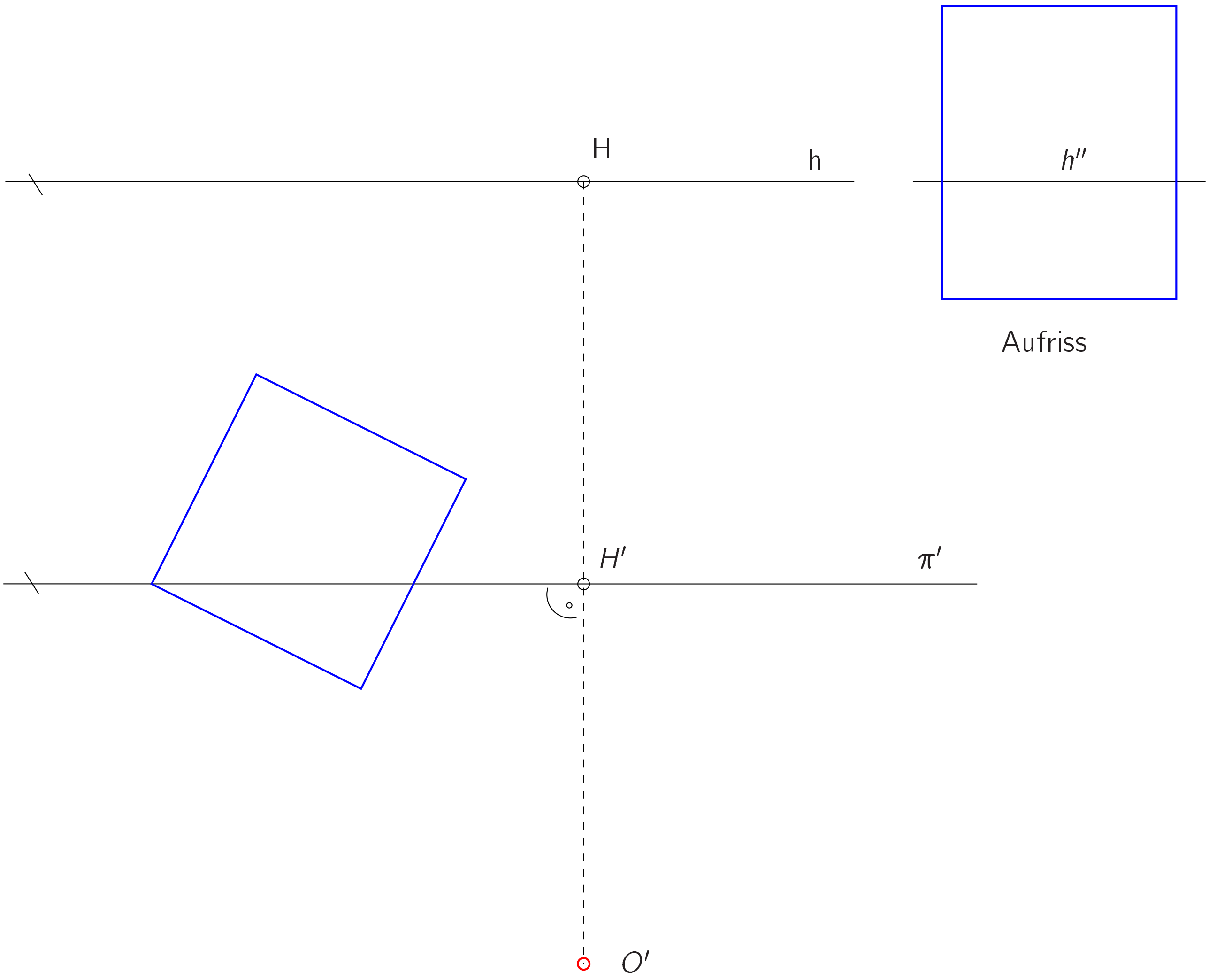

Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.3 *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.12). (Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.)*

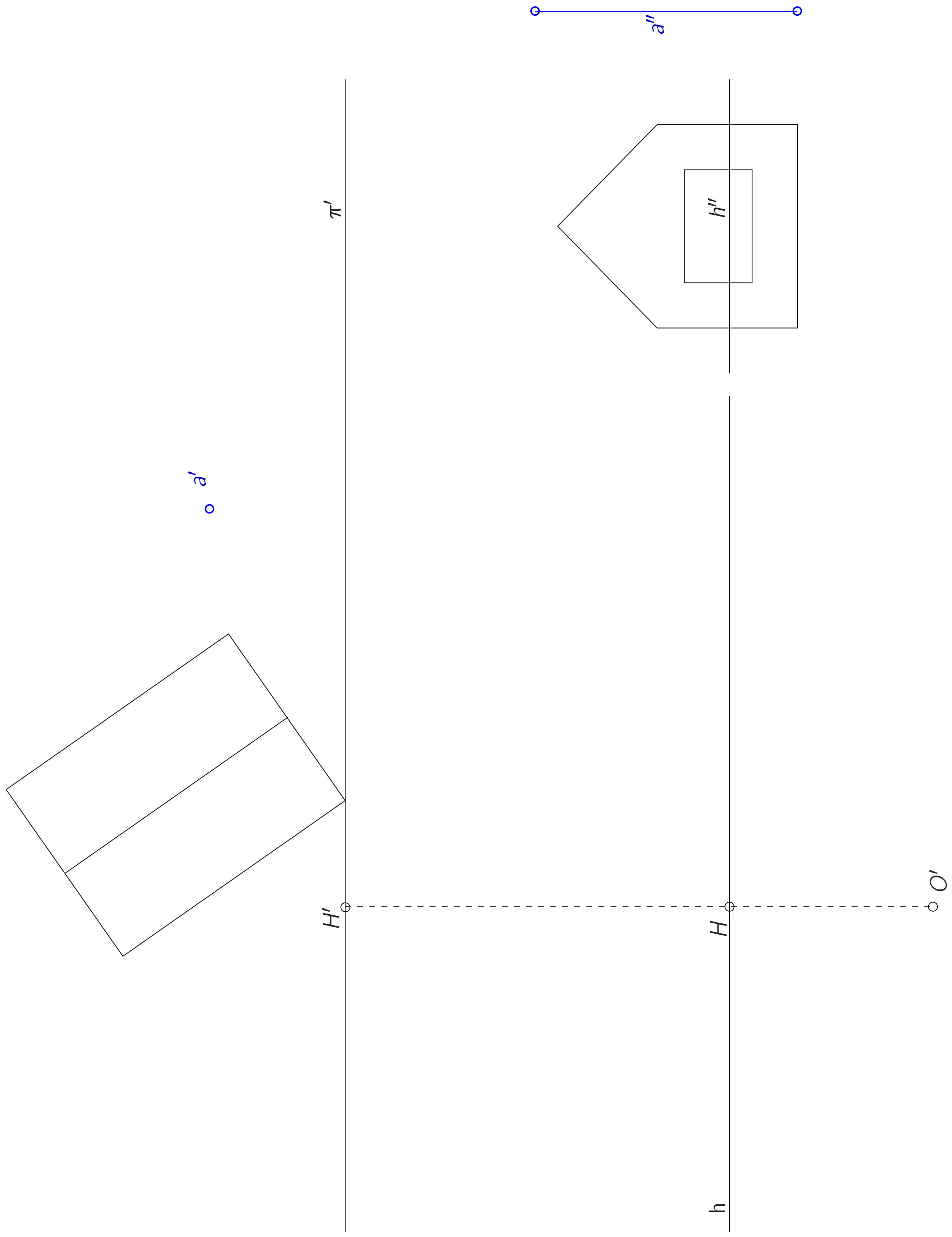

Abbildung 5.12: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

Die Abbn. 5.13, 5.14 zeigen, wie sich das Bild eines Hauses verändert, wenn man die Lage der Bildtafel oder des Augpunktes verändert.

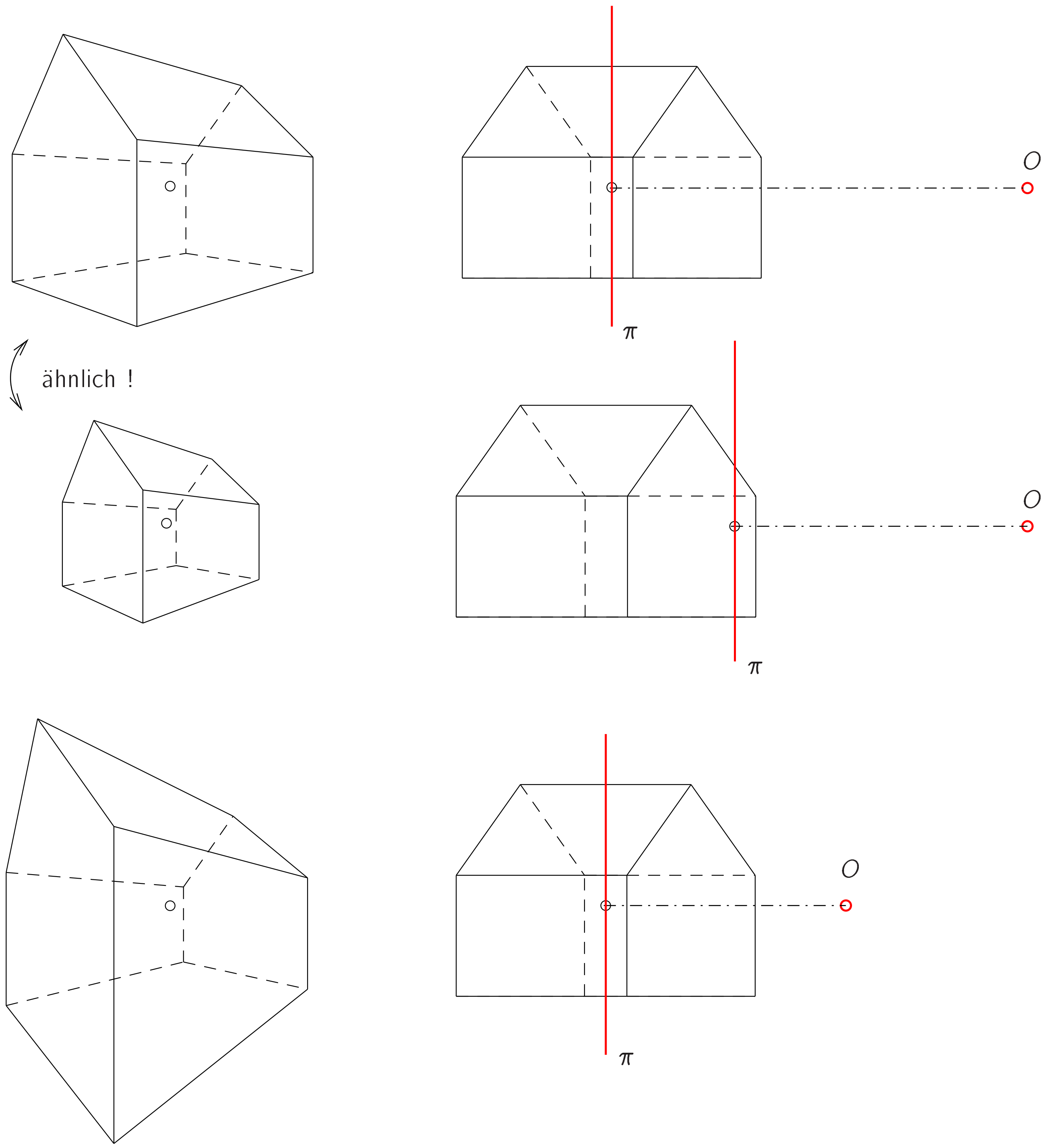

Abbildung 5.13: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

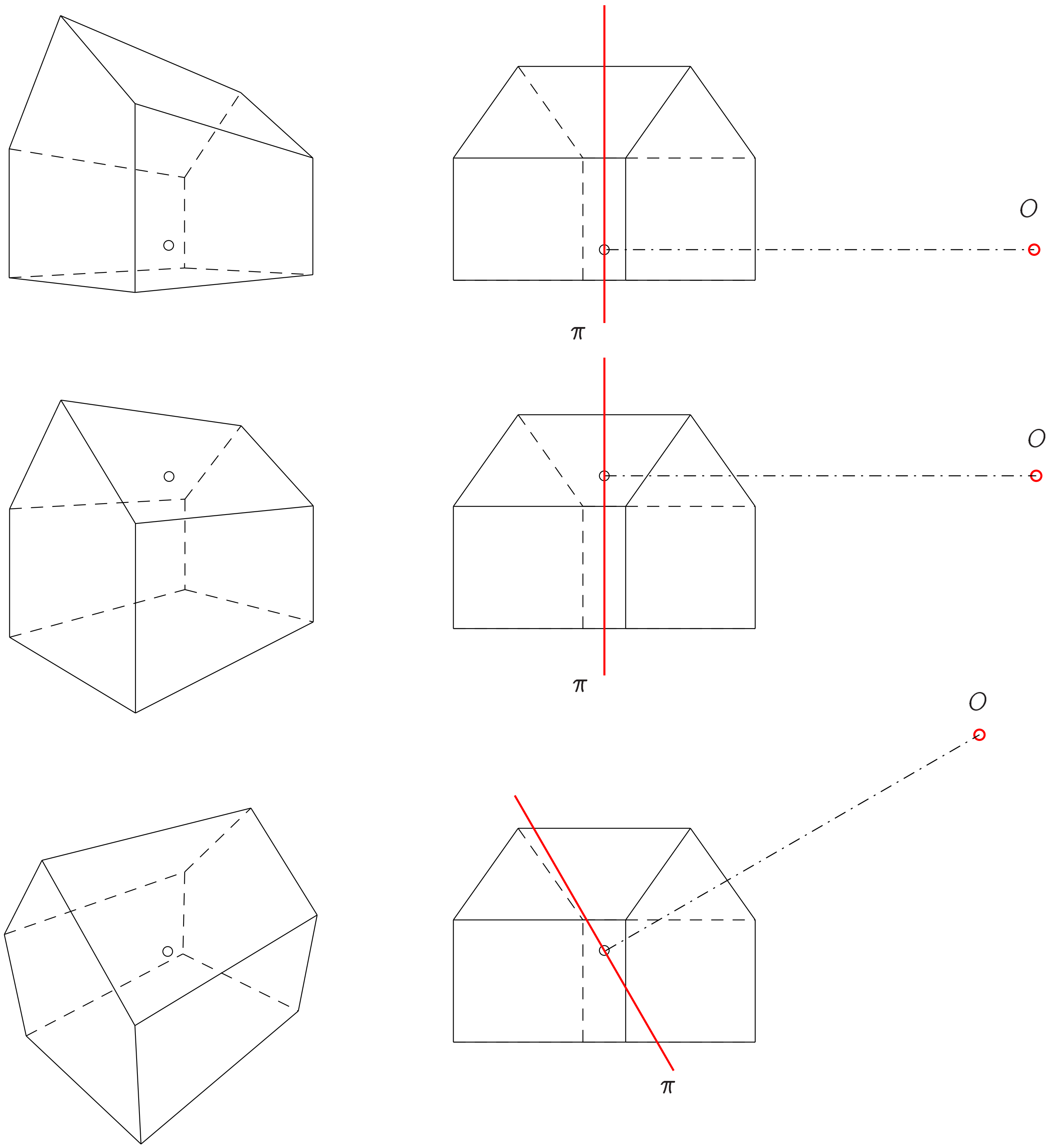

Abbildung 5.14: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

5.2 Schattenkonstruktionen

(s. FKN S.251)

5.2.1 Schatten bei Parallelbeleuchtung

Aufgabe 5.4 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene.*
Die Lichtrichtung ist durch den Pfeil l gegeben.
(Gehe im Prinzip wie bei Parallelprojektion vor (s. 2.5).
Verwende den Fluchtpunkt S der Sonnenstrahlen und den
Fluchtpunkt S_F der Grundrisse der Sonnenstrahlen.)

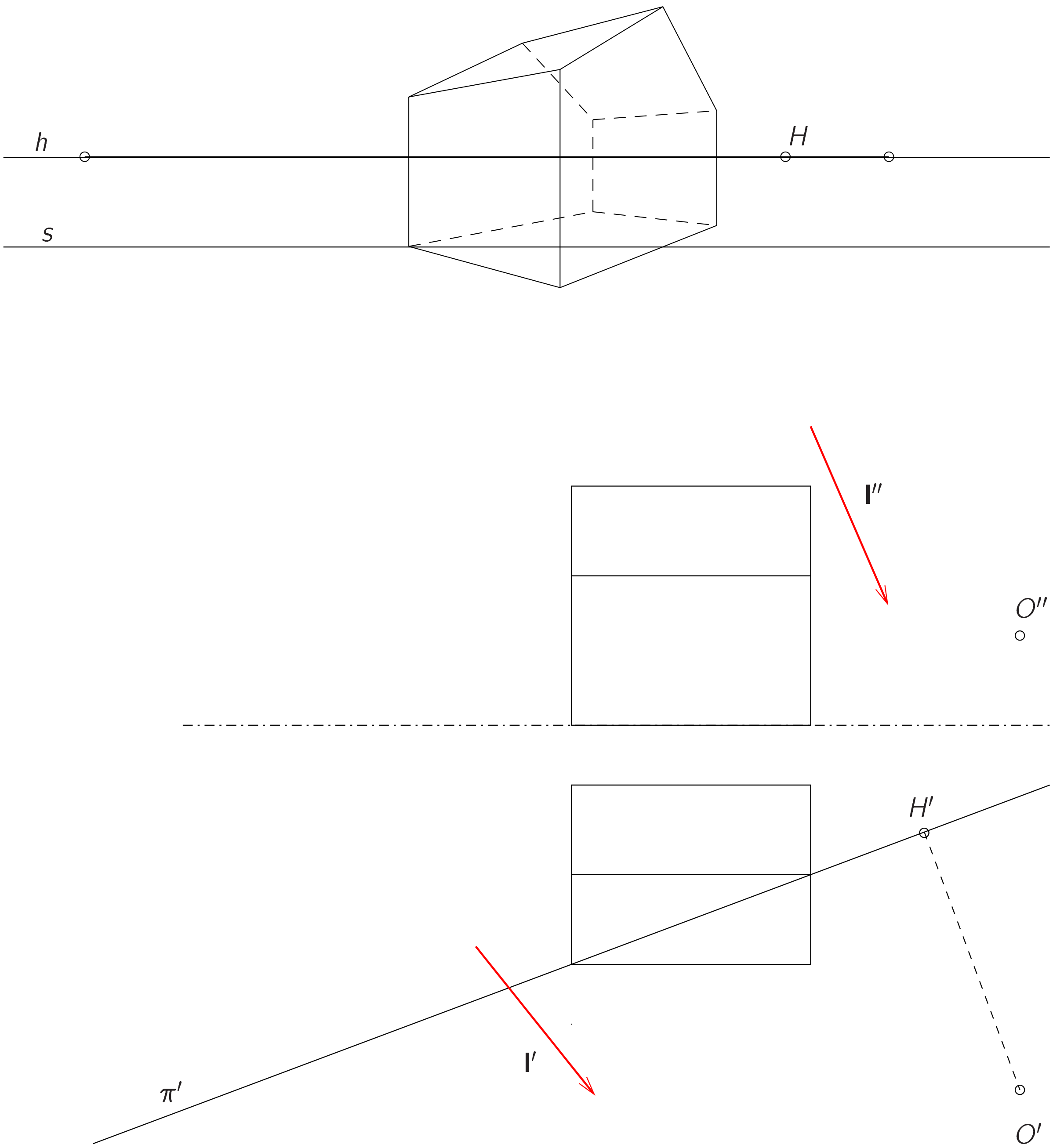

Abbildung 5.15: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

5.2.2 Schatten bei Zentralbeleuchtung

Aufgabe 5.5 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene.*
Die Lichtquelle ist durch den Punkt L gegeben. (Gehe im Prinzip wie bei Parallelprojektion vor (s. 2.5).)

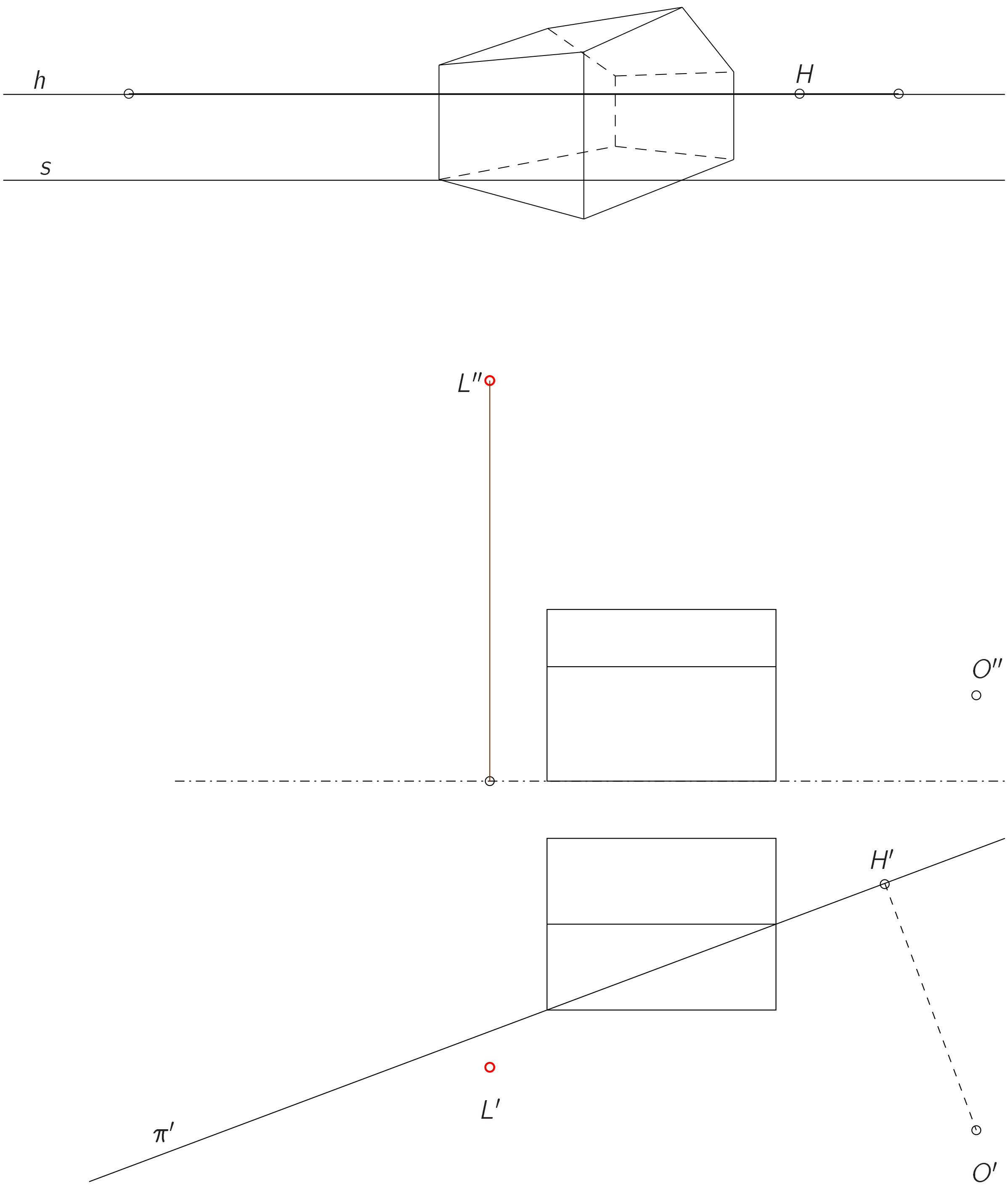

Abbildung 5.16: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Aufgabe 5.6 *Konstruiere den Schatten eines HAUSes und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei parallelem Licht (gegeben durch S und S_F).*
(Bei der Konstruktion des **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch P, P' und Lichtrichtung mit Hauswand/Dach.)*

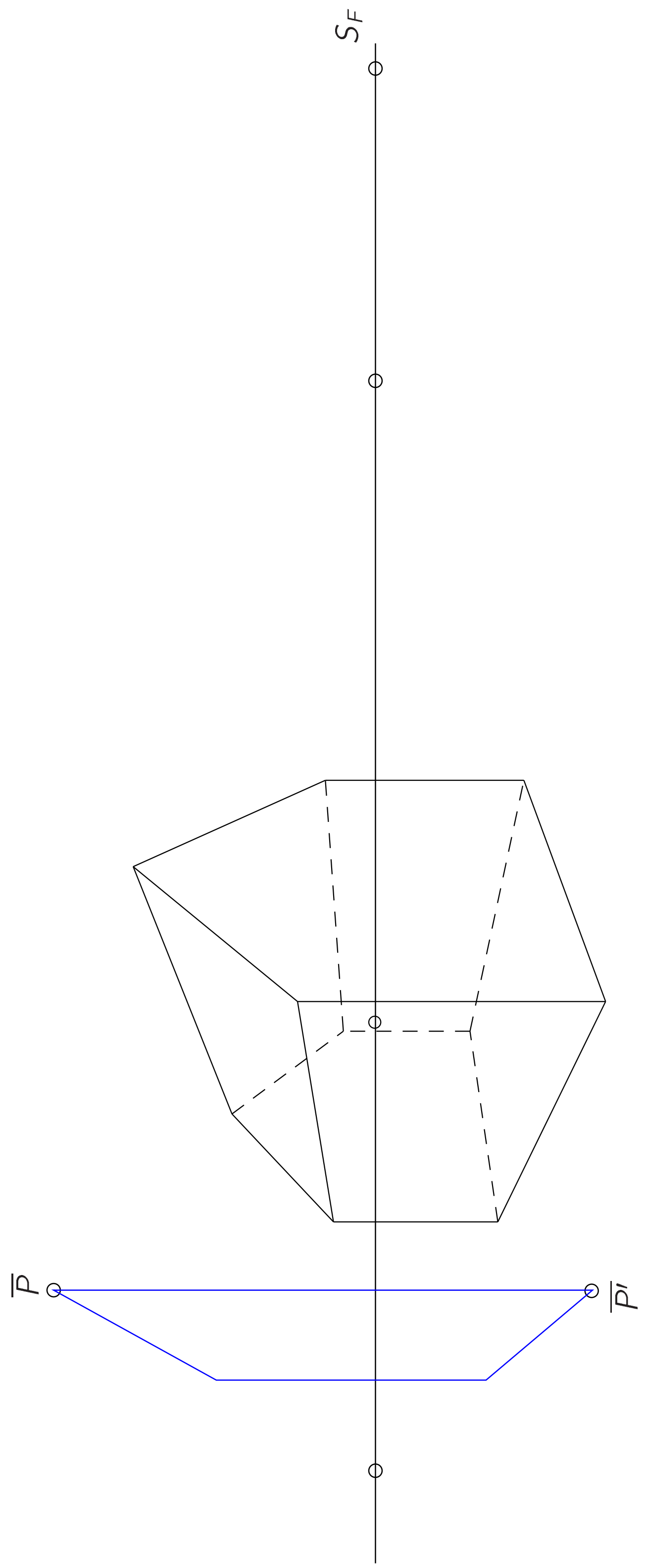

Abbildung 5.17: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei parallelem Licht

5.3 Rekonstruktionen

(s. LEO S.242)

Bisher sind wir von einem in Grund– und Aufriss gegebenen Objekt ausgegangen und haben dazu das perspektive Bild konstruiert. Nun soll die umgekehrte Aufgabe behandelt werden: Es ist ein perspektives Bild (z. B. eine Photographie) gegeben und es sollen **wahre Abmessungen** von Figuren des perspektiven Bildes bestimmt werden. Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe weiterer Informationen möglich.

5.3.1 Rekonstruktion bei Standardanordnung und senkrechter Bildtafel

In diesem Abschnitt machen wir stets die folgenden

Annahmen:
Es sei ein perspektives Bild mit senkrechter Bildtafel gegeben und
Horizont h, **Hauptpunkt** H, **Standlinie** s und **Distanz** d sind bekannt.
Zum **Beispiel**:
Gegeben: perspektives Bild eines Hauses (Abb. 5.18).
Gesucht: die wahren Abmessungen. (s. Aufgabe 5.9)

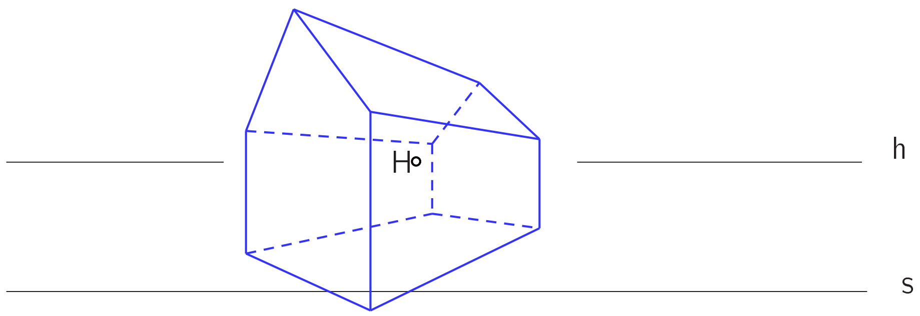

Abbildung 5.18: Beispiel zu *wahre Abmessungen* eines Hauses

5.3.1.1 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.242)

Gegeben: das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden g.
Gesucht: die wahre Länge der Strecke.

Bei der Zweitafelprojektion haben wir die Strecke, deren wahre Länge bestimmt werden soll, parallel zu einer der Risstafeln gedreht und konnten dann die wahre Länge in der anderen Risstafel ablesen. Bei Zentralprojektion genügt das Paralleledrehen zur Bildtafel nicht, da bei der *Zentral*-Projektion die Länge verändert wird, es sei denn die gedrehte Strecke liegt schon in der Bildtafel.

Idee für den Fall, dass die **Strecke in der Standebene** (Grundrissebene) liegt:
Man denkt sich die Strecke AB um den Spurpunkt S_g (der Geraden g durch A, B) mit senkrechter Drehachse in die Bildtafel auf die Standlinie s gedreht (s. Abb. 5.20). Da eine Drehung im perspektiven Bild nur schwer darstellbar ist, denkt man sich eine Parallelprojektion aus, die dasselbe bewirkt. Den zugehörigen Fluchtpunkt nennt man **Messpunkt** M_g. Er ist für alle zu AB parallelen Strecken gleich. Im Falle einer horizontalen Strecke, wie hier angenommen, liegt M_g auf dem Horizont und wird gemäß Abb. 5.20 bestimmt.

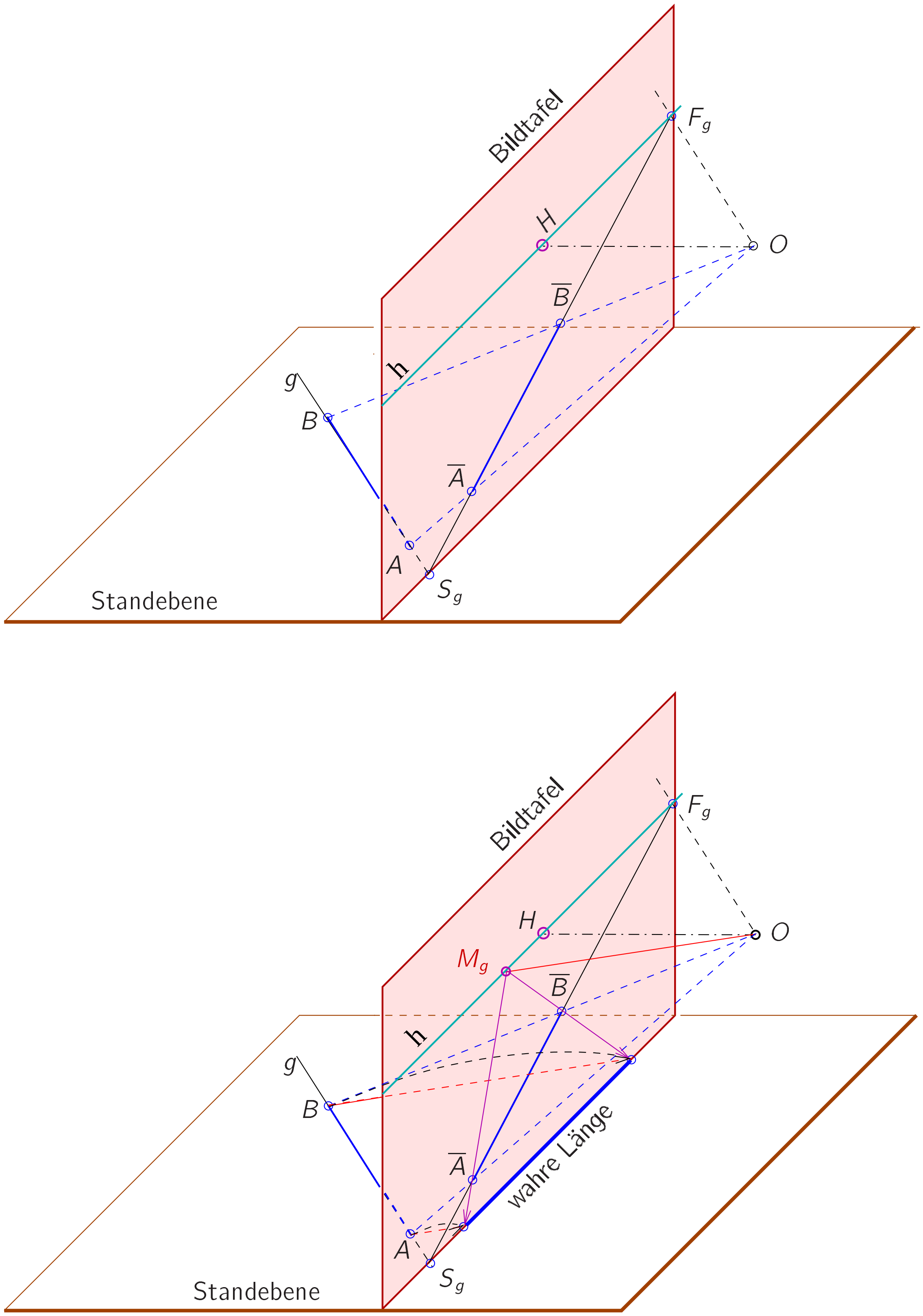

Abbildung 5.19: Idee zur Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

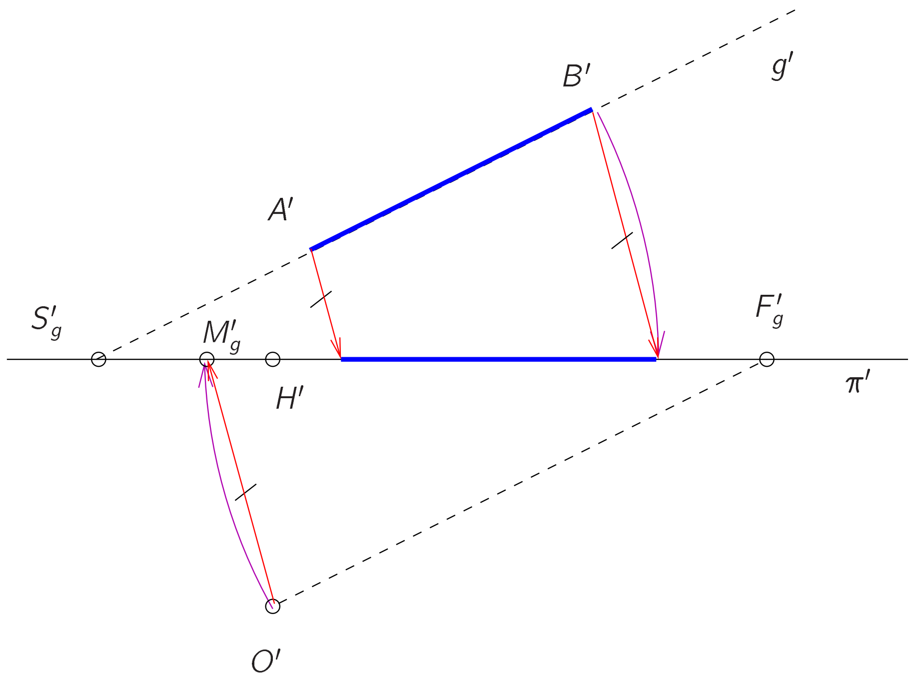

Abbildung 5.20: Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

Da wir aber den Grundriss nicht als bekannt voraussetzen, müssen wir den Messpunkt im perspektiven Bild bestimmen.

Durchführung für den Fall einer **horizontalen** Strecke in der **Standebene**:

1. Zeichne den Fluchtpunkt F_g der Geraden g.
2. Zeichne über oder unter dem Hauptpunkt im Abstand d (Distanz) O' und drehe O' um F_g auf den Horizont h. Dadurch erhält man den **Messpunkt** M_g.
3. Die Projektion der Strecke $\overline{AB}$ von M_g aus auf die Standlinie liefert die wahre Länge der Strecke.

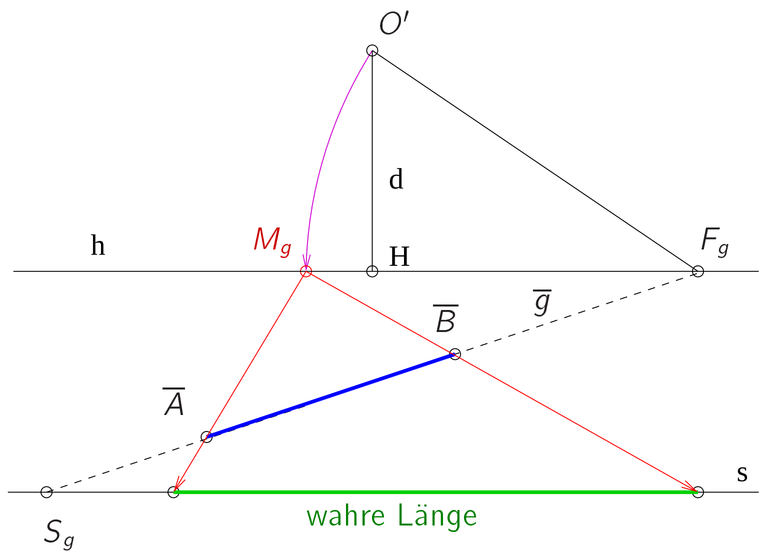

Abbildung 5.21: Bestimmung der wahren Länge einer Strecke

Aufgabe 5.7 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.22 gegebenen Strecke, die in der Standebene liegt. Die Distanz sei $d = 4cm$.*

Distanz $d = 4$cm

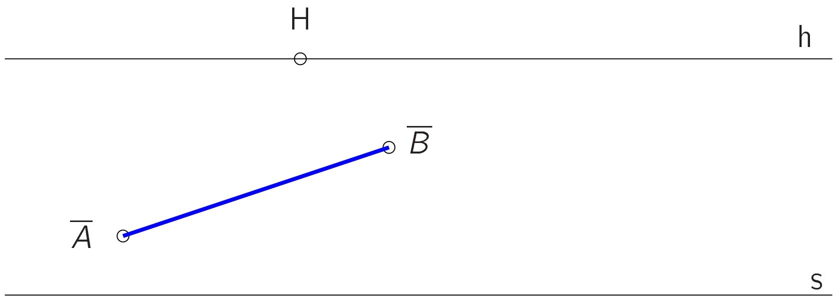

Abbildung 5.22: Bestimmung einer wahren horizontalen Länge

Falls die Strecke $\overline{AB}$ **parallel zur Bildtafel** liegt, kann man den Messpunkt M_g **beliebig** auf dem Horizont h wählen. Es muss nur von der Ebene ε durch A, B, deren Fluchtgerade f_ε den Messpunkt M_g enthält, auch die Spurgerade s_ε bekannt oder konstruierbar sein. Dann projiziert man (s. Abb. 5.22) die Strecke $\overline{AB}$ von M_g aus auf s_ε.

Aufgabe 5.8 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.23 gegebenen Strecken, die parallel zur Bildtafel π sind. $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ liegen in der Standebene.*

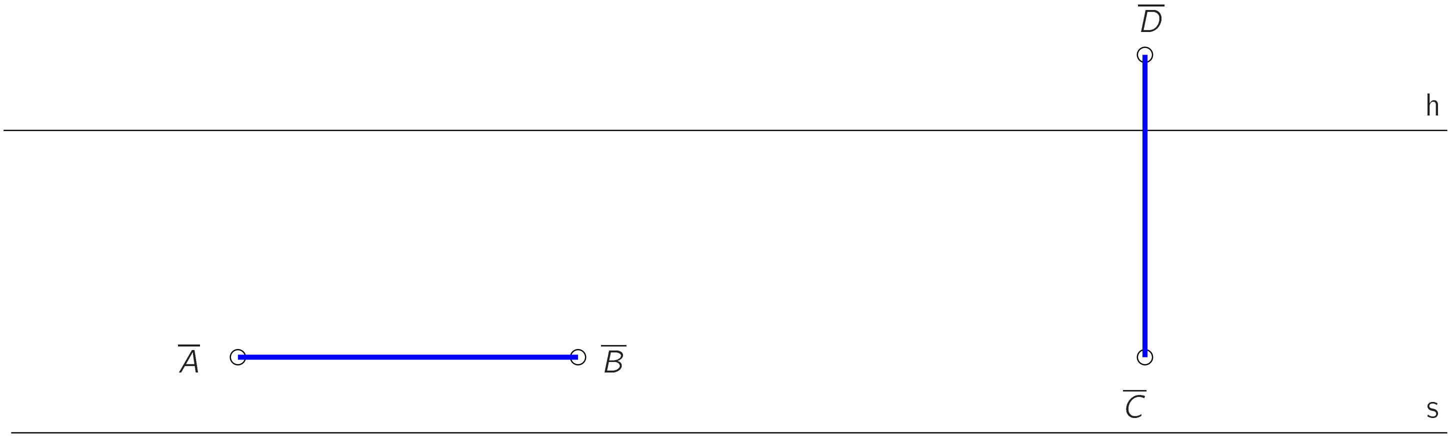

Abbildung 5.23: Bestimmung einer wahren horizontalen/senkrechten Länge: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ liegen in der Standebene

Aufgabe 5.9 *Bestimme die wahren Abmessungen des in Abb. 5.24 gegebenen Hauses. (Die Distanz ergibt sich aus den horizontalen Fluchtpunkten mit Hilfe eines Thaleskreises.)*

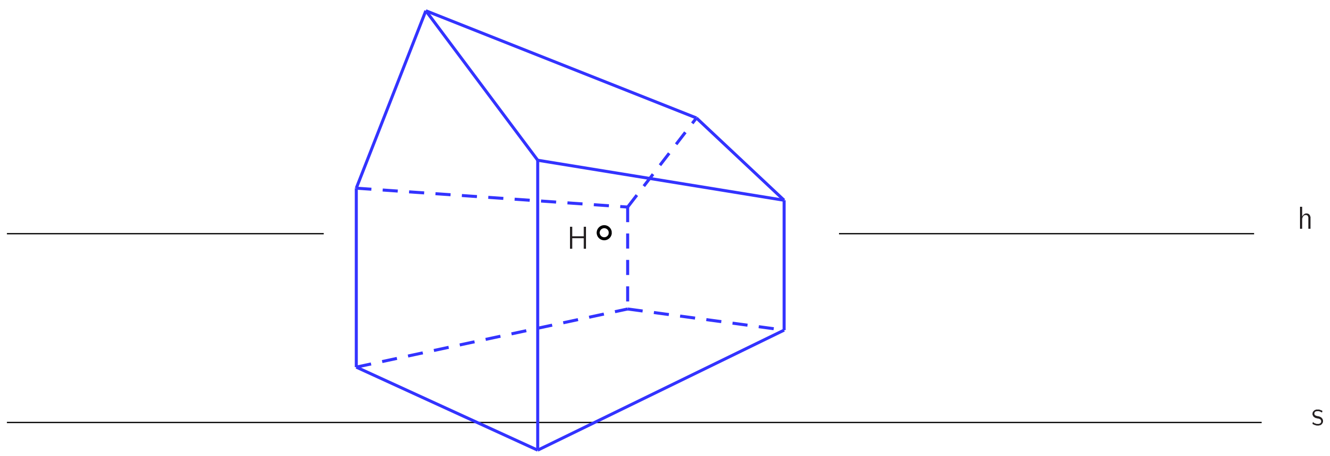

Abbildung 5.24: Bestimmung der wahren Abmessungen eines Hauses

Mit Hilfe des Messpunktes M_g einer Geraden g lässt sich auch auf g eine **wahre Länge antragen**.

Aufgabe 5.10 *Ergänze in dem perspektiven Bild eines Hauses eine Tür links von dem Punkt A. Breite der Tür: 2cm, Höhe: 3cm. Füge senkrecht zu dem vorhandenen Haus rechts hinten einen Anbau mit derselben Traufhöhe, der Firsthöhe 6.5cm, Breite 6cm, Länge 4cm hinzu.*

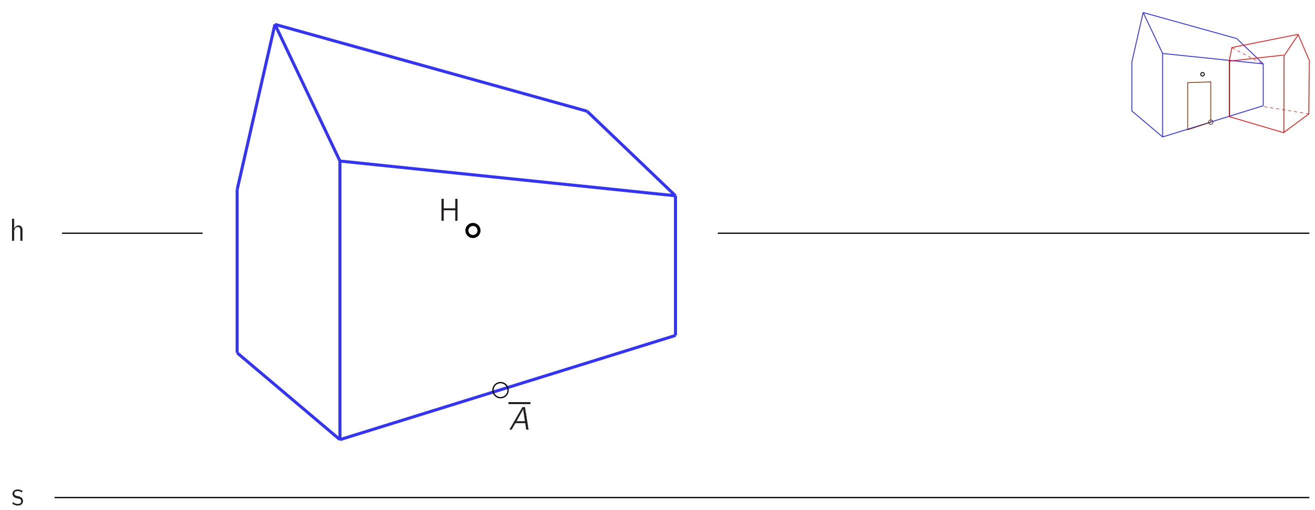

Abbildung 5.25: Antragen wahrer Längen: Tür und Anbau

5.3.2 Bestimmung der äußeren Orientierung

Unter der **äußeren Orientierung** einer Zentralprojektion versteht man die Lage des Augpunktes und der Bildtafel relativ zu dem Objekt, das abgebildet wird.

Um die äußere Orientierung bei bekannter Standardanordnung zu bestimmen, kehrt man die in Abschnitt 5.1.3 beschriebene Methode "Architektenanordnung" um.

Durchführung:

1. Zeichne unter– oder oberhalb des perspektiven Bildes eine Parallele π' zum Horizont h. π' ist der Grundriss der **Bildtafel** (Architektenanordnung !).
2. Übertrage den **Hauptpunkt** H und alle notwendigen **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Der Grundriss O' des **Augpunkt**es liegt auf dem Lot zu π' in H' im Abstand d , der **Distanz**.
3. **Rekonstruktion** einer **Gerade**, die in der Standebene liegt:
   Bestimme (falls nicht schon in 2. geschehen) die Grundrisse F_g', S_g' des Flucht– bzw. Spurpunktes der Geraden g. g' ist dann eine Parallele zu $O'F_g'$ durch S_g'.
4. **Rekonstruktion** eines **Punktes** P, der in der Standebene liegt:
   Zeichne $\overline{P'}$ mit Hilfe des Lotes von $\overline{P}$ auf π' und den Grundriss des Projektionsstrahls (Gerade $O'\overline{P'}$).
   Mit Hilfe des Grundrisses einer weiteren Gerade durch P (z.B. Tiefenlinien oder Hauskanten,...) erhält man schließlich P'.
5. Ein Punkt, der nicht in der Standebene liegt, lässt sich analog rekonstruieren, falls sein Grundriss im perspektiven Bild bekannt oder konstruierbar ist. Die Höhe eines solchen Punktes erhält man über deren "wahre Länge" (s. Anfang dieses Abschnitts).

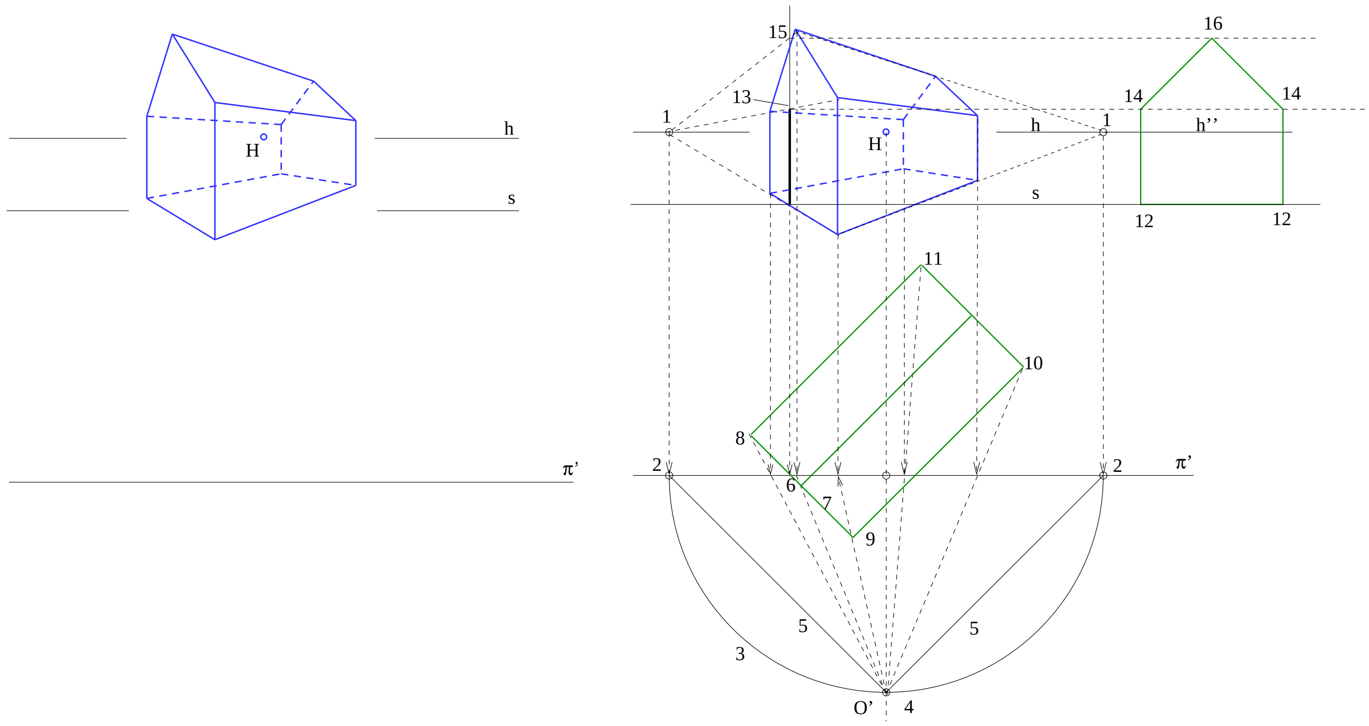

Abbildung 5.26: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses: Lösungsschritte 1–16

Aufgabe 5.11 *Rekonstruiere Grund- und Aufriss eines Hauses* konstruiere *einen Anbau (analog zu Aufgabe 5.10) der Breite 3cm, Traufhöhe wie das gegebene Haus und der Firsthöhe 4cm.*

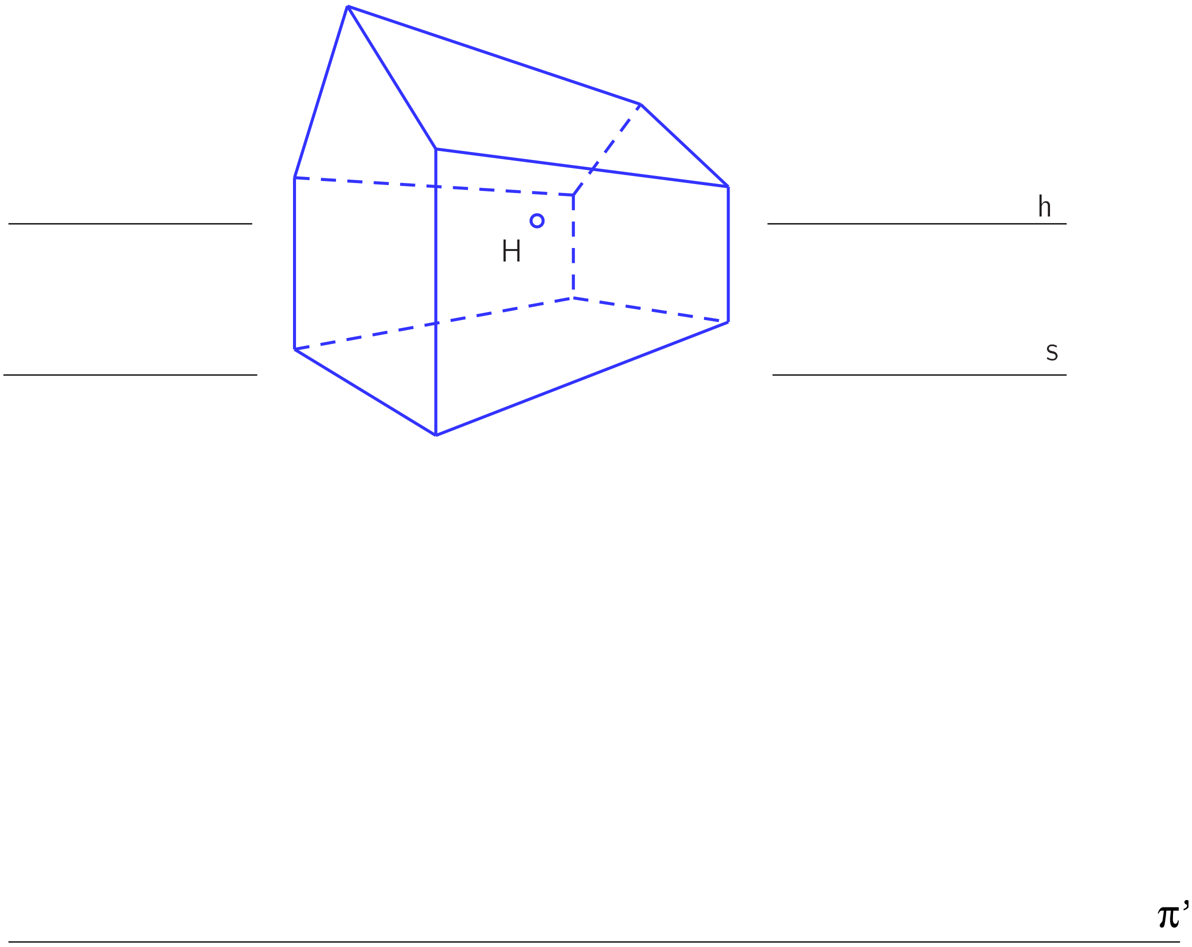

Abbildung 5.27: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses