Kapitel 4

Projektion von Kurven und Flächen

4.1 Kreis und Ellipse

(s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem lässt sich ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r durch die **Gleichung**: $x^2 + y^2 = r^2$ oder durch die
Parameterdarstellung: $x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ beschreiben.

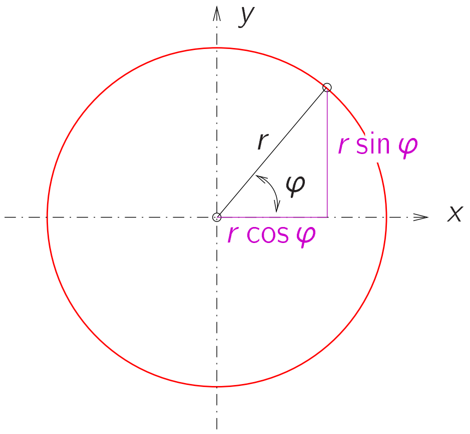


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ellipse zu definieren. Wir wollen hier die folgende Definition wählen:

Eine ebene Kurve k, die sich in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0$$

beschreiben lässt, ist eine **Ellipse** mit **Mittelpunkt** $(0,0)$ und den **Halbachsen** a, b. Für $a = b$ erhält man einen Kreis.

Die Strecke zweier Ellipsenpunkte heißt **Sehne** der Ellipse.

Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** der Ellipse.

Die Punkte $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ sind die **Scheitel** der Ellipse.

Im Fall $a \neq b$ sind die x-Achse und die y-Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an x- und y-Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Die Durchmesser auf den Symmetrieachsen heißen die **Hauptachsen** der Ellipse.

Die **Parameterdarstellung** der Ellipse k ist: $x = a\cos\varphi\,,\ y = b\sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ellipsenkonstruktionen

a) **Scheitelkreiskonstruktion.**

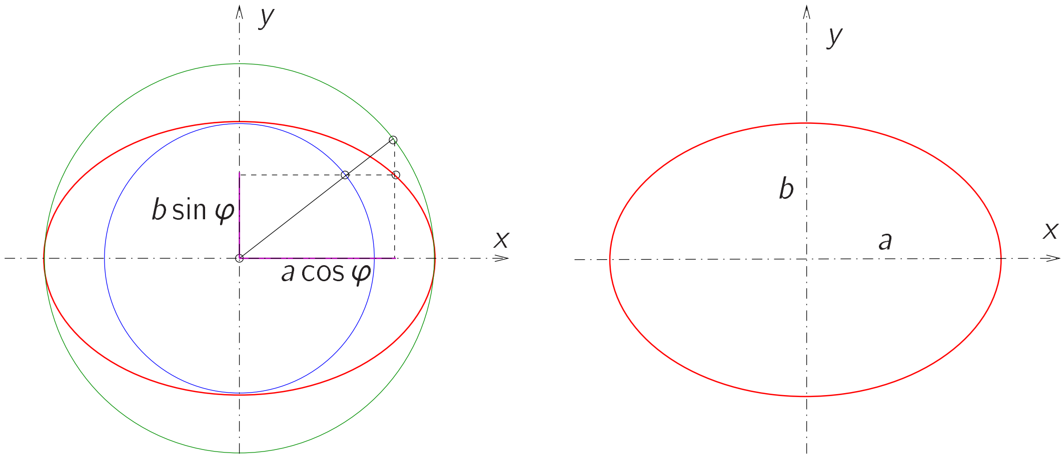


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse erkennt man, dass der Ellipsenpunkt $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ dieselbe x-Koordinate wie der Punkt $(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=a^2$ und dieselbe y-Koordinate wie der Punkt $(b\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=b^2$ zum Parameter φ hat. Die beiden Kreise $x^2+y^2=a^2$ und $x^2+y^2=b^2$ heißen die **Scheitelkreise** der obigen Ellipse.

Daher kann man Ellipsenpunkte konstruieren, indem man die y-Koordinate eines Punktes des großen Scheitelkreises mit dem Faktor b/a staucht (bzw. die x-Koordinate des kleinen Scheitelkreises mit dem Faktor a/b streckt):

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Zeichne die beiden Scheitelkreise der Ellipse (s. Abb. 4.3, links).

(2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Ellipse.

(3) Der Strahl schneidet den kleinen (bzw. großen) Kreis in einem Punkt P (bzw. Q).

(4) Fälle das Lot von P (Q) auf die kleine (große) Achse. Der Schnittpunkt dieser Lote ist ein Punkt der Ellipse.

Eine Abbildung, die nur eine Koordinate streckt oder staucht, nennt man **Affinität**.

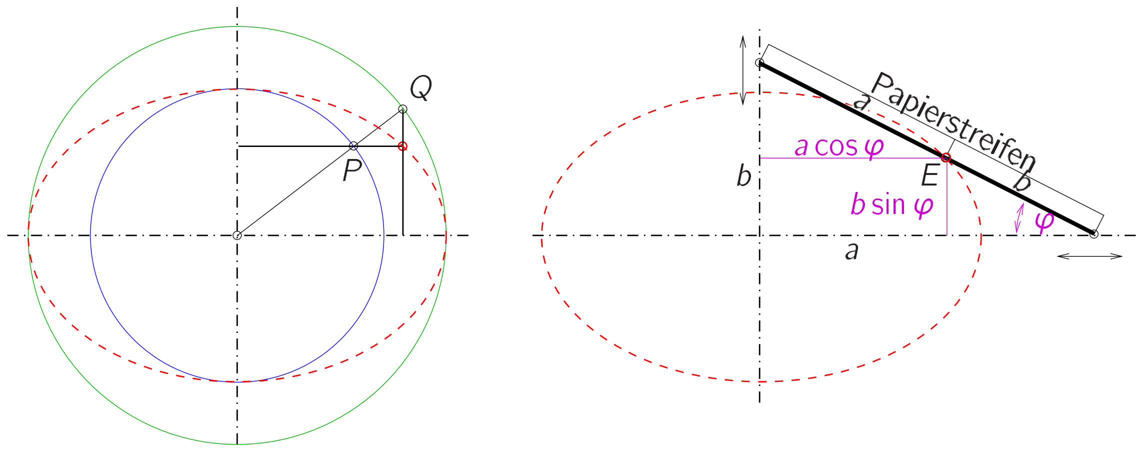


Abbildung 4.3: Konstruktion von Punkten einer Ellipse

b) **Papierstreifenmethode.** (Abb. 4.3, rechts) (s. LEO S.60)

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Schneide einen Papierstreifen der Länge $a+b$ aus und markiere die Stelle, an denen die Strecken der Länge a und b zusammengesetzt sind, durch E.

(2) Gleitet der Papierstreifen wie in der Skizze (Abb. 4.3, rechts) auf den Achsen der Ellipse, so beschreibt der Punkt E in jeder Lage einen Ellipsenpunkt.

c) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.4, links)

Voraussetzung: Die „Brennpunkte" F_1, F_2 und die große Halbachse a der Ellipse sind bekannt.

(1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.

(2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten F_1, F_2.

(3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.

(4) Für die Brennweite $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ gilt: $e^2 = a^2 - b^2$.

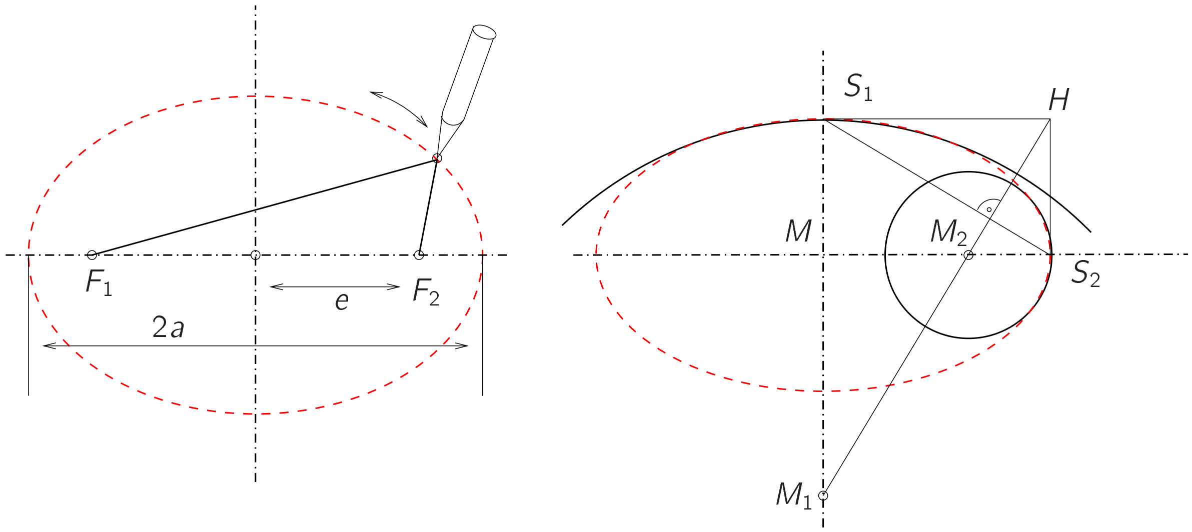


Abbildung 4.4: "Gärtnerkonstruktion" und Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse

d) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.4, rechts) (s. LEO S.64)

Die Methoden a), b), c) bestimmen Ellipsenpunkte exakt. Wir geben nun noch eine sehr praktische Näherungsmethode an:

Idee: Man bestimmt Mittelpunkte und Radien der Krümmungskreise für die Scheiteln der Ellipse, zeichnet die Scheitelkrümmungskreise und nähert die Ellipse durch tangentiale Kurvenbögen an.

Voraussetzung: Mittelpunkt M und Scheitel sind bekannt.

(1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel S_1, S_2.

(2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck M, S_1, S_2 durch den Punkt H zu einem Rechteck.

(3) Fälle das Lot von H auf die Gerade durch S_1, S_2.

(4) Die Schnittpunkte M_1, M_2 des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel S_1, S_2.

(5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.

(6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

4.2 Normalriss eines Kreises

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises (Abb. 4.5):
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k''.
Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir $x-y-$Koordinaten in der Kreisebene und $\xi-\eta-$Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.5, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2+y^2=r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x,y) der Kreisebene den Grundriss (ξ,η) mit $\xi=x$ und $\eta=y\cos\alpha$ hat. Wegen $x^2+y^2=r^2$ gilt

$$\xi^2+(\eta/\cos\alpha)^2=r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2/r^2+\eta^2/(r\cos\alpha)^2=1\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren große Halbachse gleich r ist.

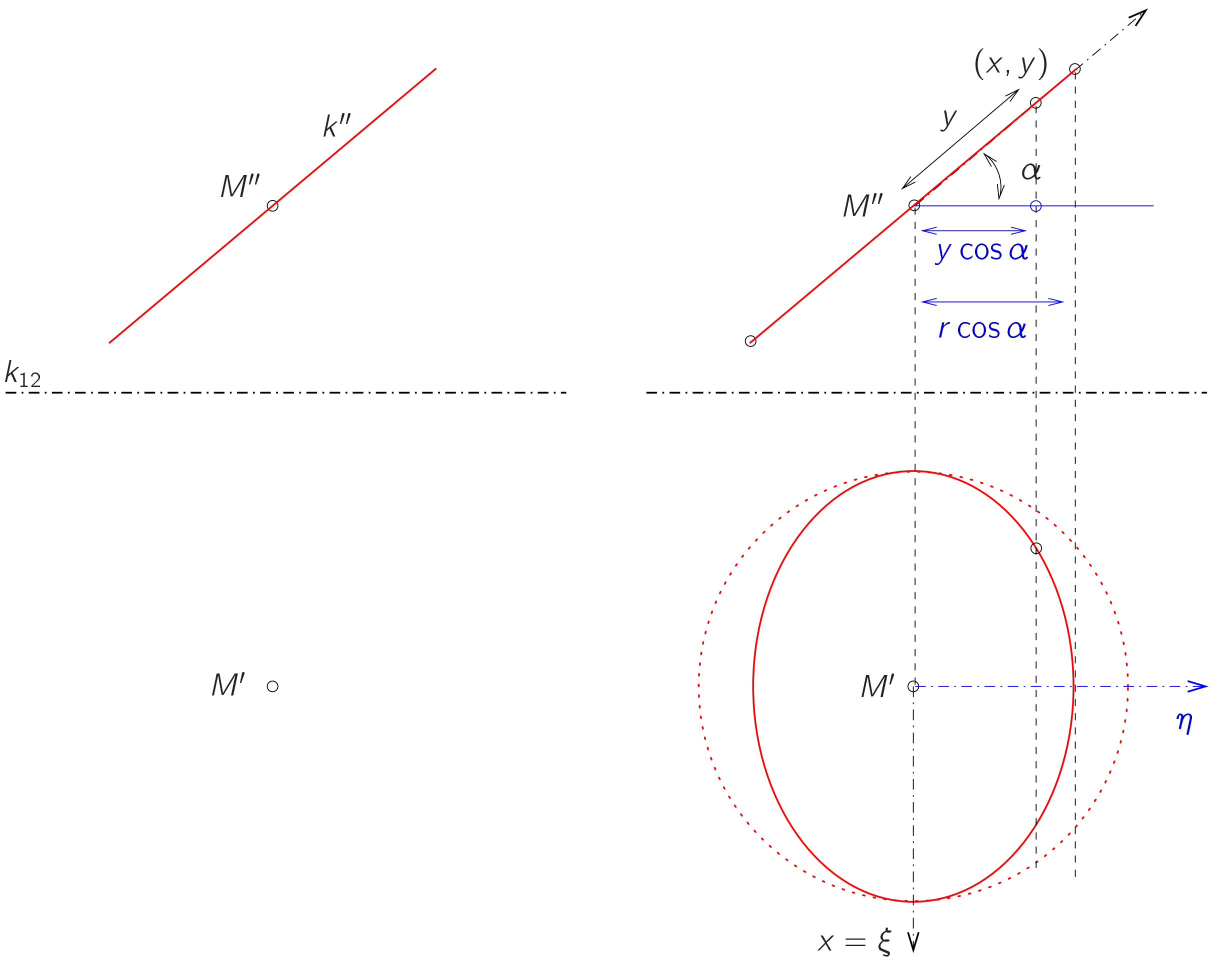


Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

Aufgabe 4.1 *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schreitelkrümmungskreismethode.*

4.3 Parallelprojektion einer Ellipse

Die Parallelprojektion einer Ellipse ist eine Ellipse oder eine Strecke. Der Mittelpunkt geht in den Mittelpunkt der Bildellipse über. Da rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, sind die Bilder der Scheitel i.a. **nicht** die Scheitel der Bildellipse. Deshalb führt man eine Verallgemeinerung des Begriffs „senkrechte Durchmesser“ einer Ellipse ein:

Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen **konjugiert**, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel zum anderen Durchmesser sind (s. Abb. 4.6).

Die Hauptachsen einer Ellipse sind spezielle konjugierte Durchmesser. Je zwei senkrechte Durchmesser eines Kreises sind konjugiert.

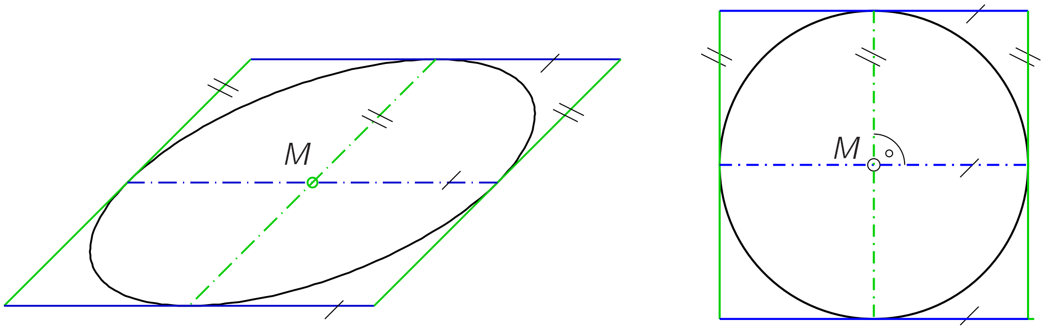


Abbildung 4.6: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Für die Konstruktion des Bildes einer Ellipse bei Parallelprojektion sind die folgenden Aussagen wichtig:

Bei **Parallel**projektion einer Ellipse werden

a) der **Mittelpunkt** auf den Mittelpunkt und
b) **konjugierte** Durchmesser auf konjugierte Durchmesser

der Bildellipse abgebildet.

Die oben beschriebenen Verfahren, eine Ellipse zu zeichnen, verlangen alle die Kenntnis des Mittelpunktes und der Scheitel der Ellipse. Deshalb benötigen wir noch eine Methode, um aus dem Mittelpunkt und zwei konjugierten Durchmessern die Scheitel zu bestimmen.

Rytzsche Konstruktion: (s. LEO S.62,63)

Gegeben: Mittelpunkt M und zwei konjugierte Halbmesser $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$ einer Ellipse (Abb. 4.7).
Gesucht: Scheitel der Ellipse.

(1) Drehung von $\overline{MQ}$ um $90°$ in $\overline{MQ'}$ so, dass der Winkel zwischen $\overline{MP}$ und $\overline{MQ'} < 90°$ ist.
(2) Mittelpunkt R der Strecke $\overline{PQ'}$ bestimmen.
(3) Kreis um R durch M.
(4) Schnitt dieses Kreises mit der Geraden durch P, Q' liefert die Punkte A, B.
(5) Die Geraden $\overline{MA}$ durch M, A und $\overline{MB}$ durch M, B geben die *Richtung* der Hauptachsen an.
(6) Die *Längen* der Hauptachsen sind $b = |AP|$ und $a = |BP|$.
(7) Die Scheitel ergeben sich aus (6) und dem “Papierstreifen” AB (vgl. mit Fig 4.3) .

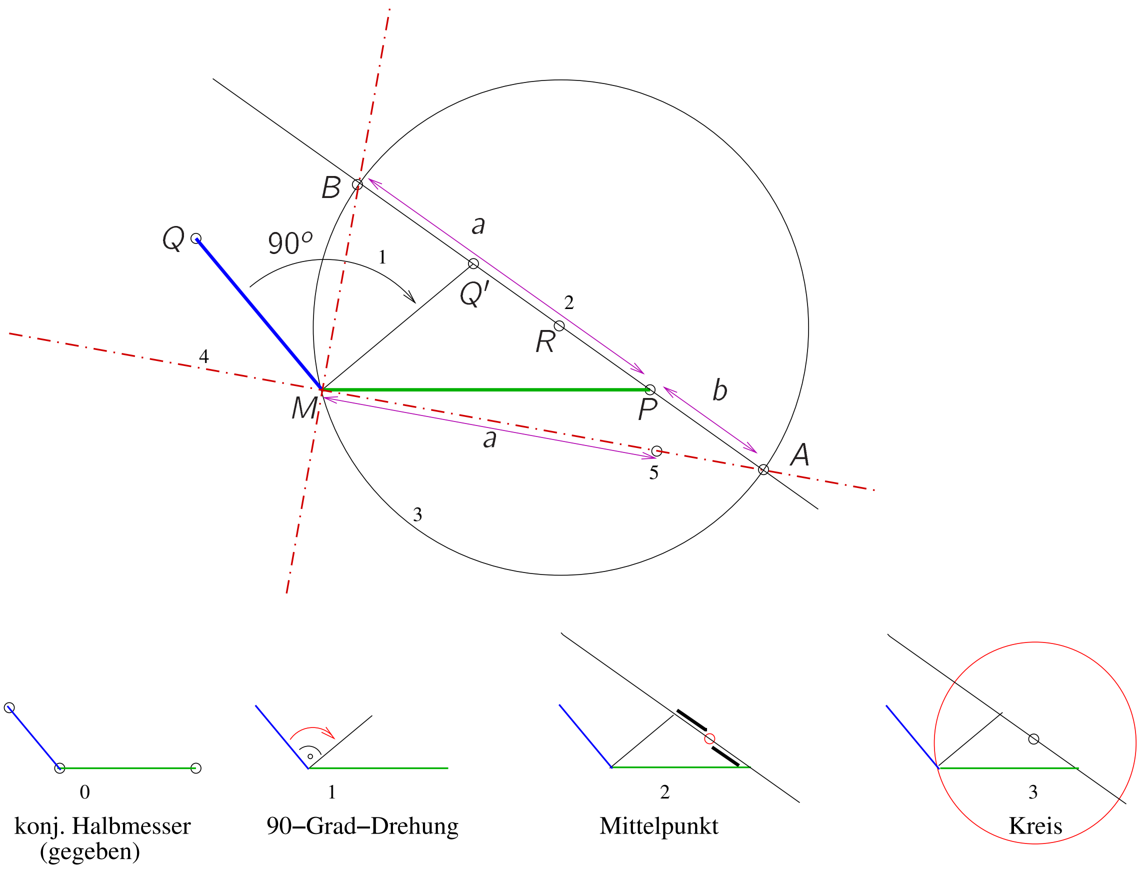


Abbildung 4.7: Rytz–Konstruktion

Aufgabe 4.2 *Bestimme in Abb. 4.8 jeweils zu vorgegebenem Mittelpunkt M und konjugierten Halbmessern $\overline{MP}, \overline{MQ}$ die Scheitel der zugehörigen Ellipse.*

Abbildung 4.8: Aufgaben zur Rytz–Konstruktion

Aufgabe 4.3 *Es sind Grund- und Aufriss eines Kreises und eine weitere Risskante k_{23} gegeben (Abb. 4.9). Bestimme das Bild des Kreises in π_3.*

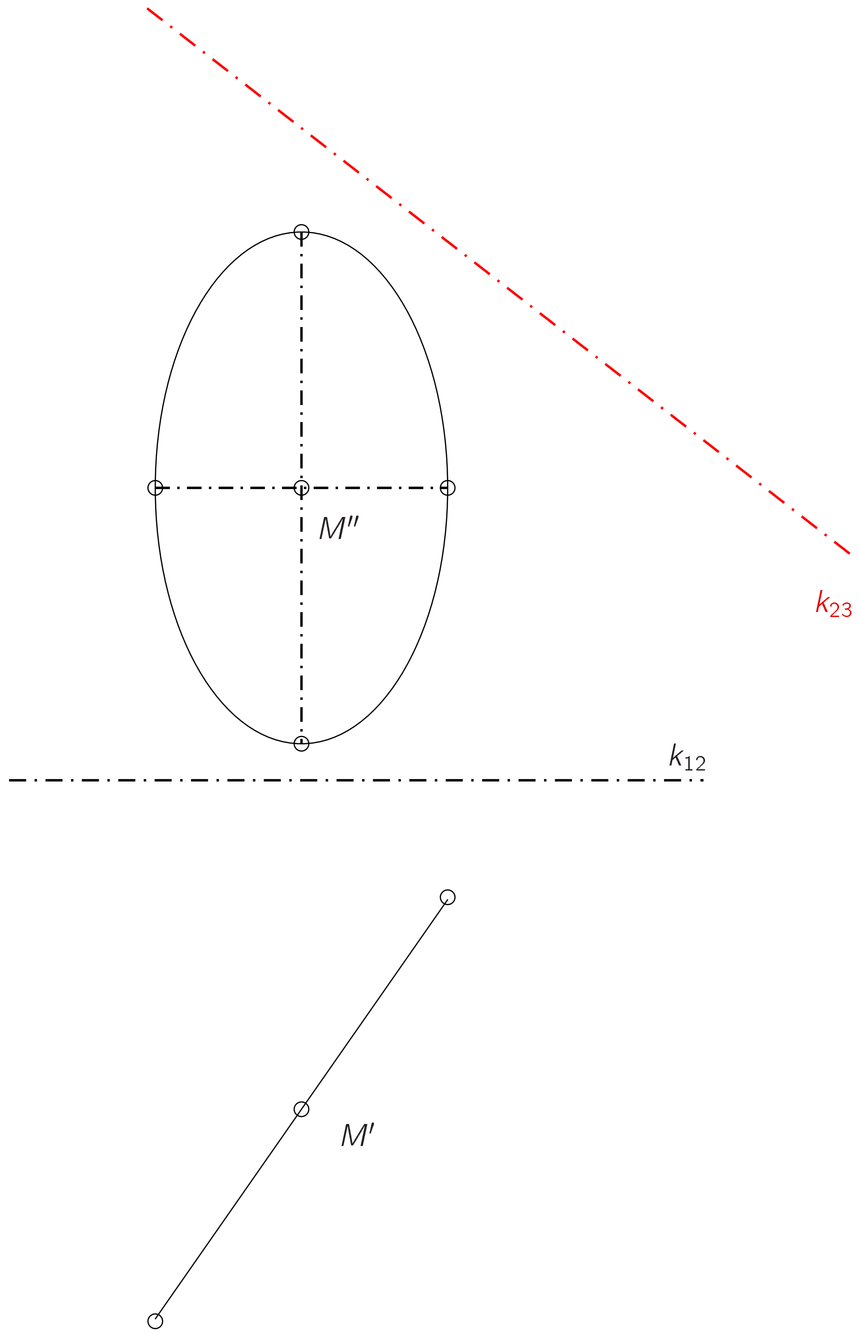


Abbildung 4.9: Umprojektion eines Kreises

4.4 Kreis und Ellipse in der Axonometrie

Das axonometrische **Bild** eines Kreises oder einer Ellipse ist eine **Ellipse** oder eine Strecke.
Im **allgemeinen** Fall geht man so vor:

(1) Bestimme das Bild des Mittelpunktes.
(2) Wähle zwei **konjugierte** Halbmesser im Urbild und bilde diese ab.
(Bei einem Kreis wählt man zwei senkrechte Halbmesser, die sich „leicht“ abbilden lassen. Bei einer Ellipse wählt man zwei senkrechte Haupthalbachsen.)
(3) Bestimme die Hauptachsen der Bildellipse mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion.
(4) Zeichne die Ellipse z.B. mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.

Es gibt einige Sonderfälle:

a) Falls die Ellipse **parallel zur Bildtafel** liegt, wird sie **unverzerrt** abgebildet.
b) Der zur Bildtafel parallele Durchmesser eines **Kreises** wird unverzerrt abgebildet und ist im Falle einer **senkrechten** Projektion gleich der großen Halbachse der Bildellipse.

Aufgabe 4.4 *:*
Gegeben: Grund– und Aufriss eines Zylinderstumpfes (Abb. 4.10).
Gesucht: Isometrische Vogelperspektive des Zylinderstumpfes.

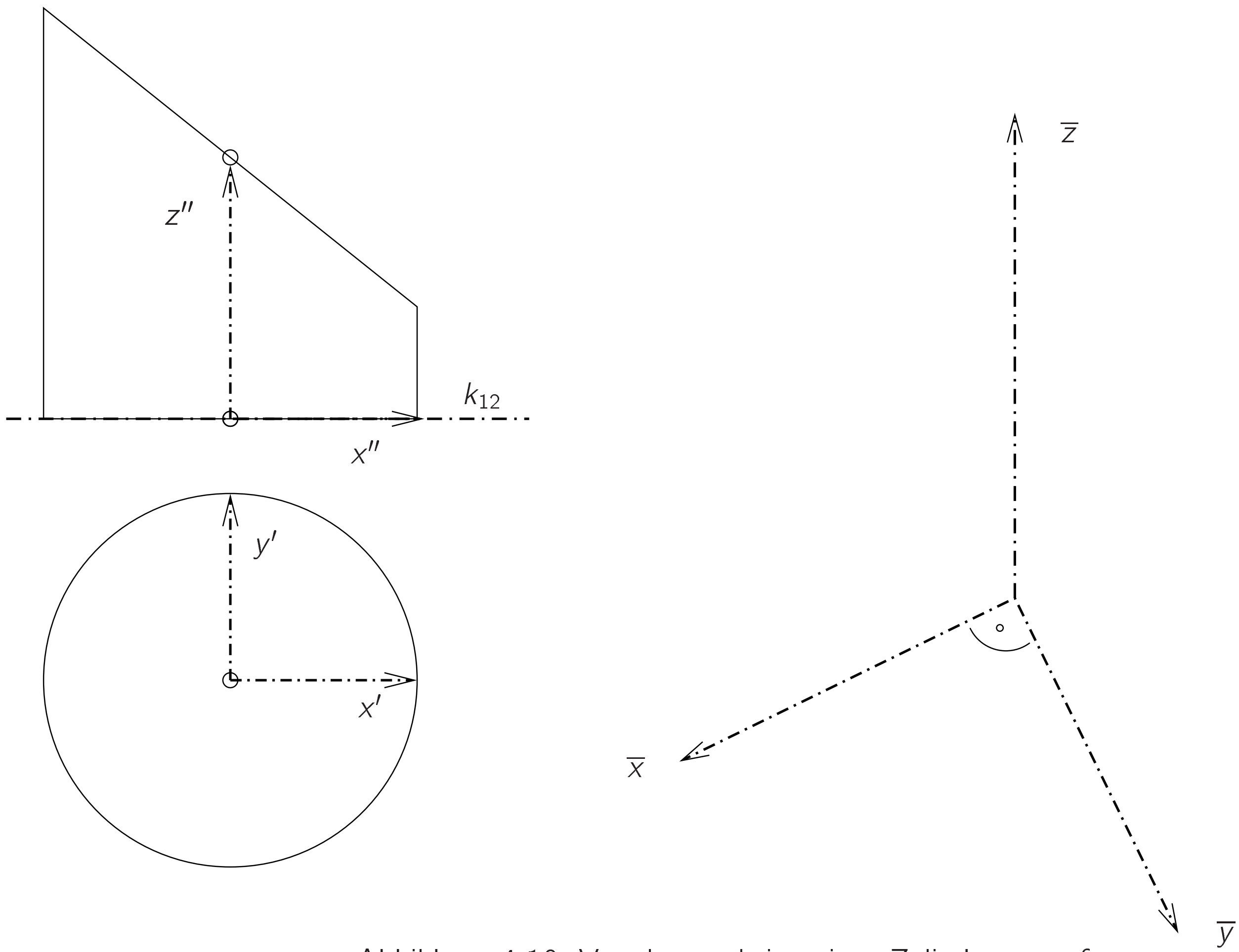


Abbildung 4.10: Vogelperspektive eines Zylinderstumpfes

Aufgabe 4.5 *:*
Stelle den in Grund– und Aufriss gegebenen Zylinder mit aufgesetzter Kugel mit Hilfe des Einschneideverfahrens in **senkrechter** *Axonometrie dar (s. Abschnitt 3.6).*
(Für die Bildellipsen der Zylinder-Kreise ist **kein Rytz** *nötig ! Die großen Hauptachsen sind parallel zur Grundrissspur und gleich dem Durchmesser der Kreise. Zur Bestimmung der Länge der kleinen Halbachse bilde man einen geeigneten Kreispunkt ab und beachte Abb. 4.3, links)*

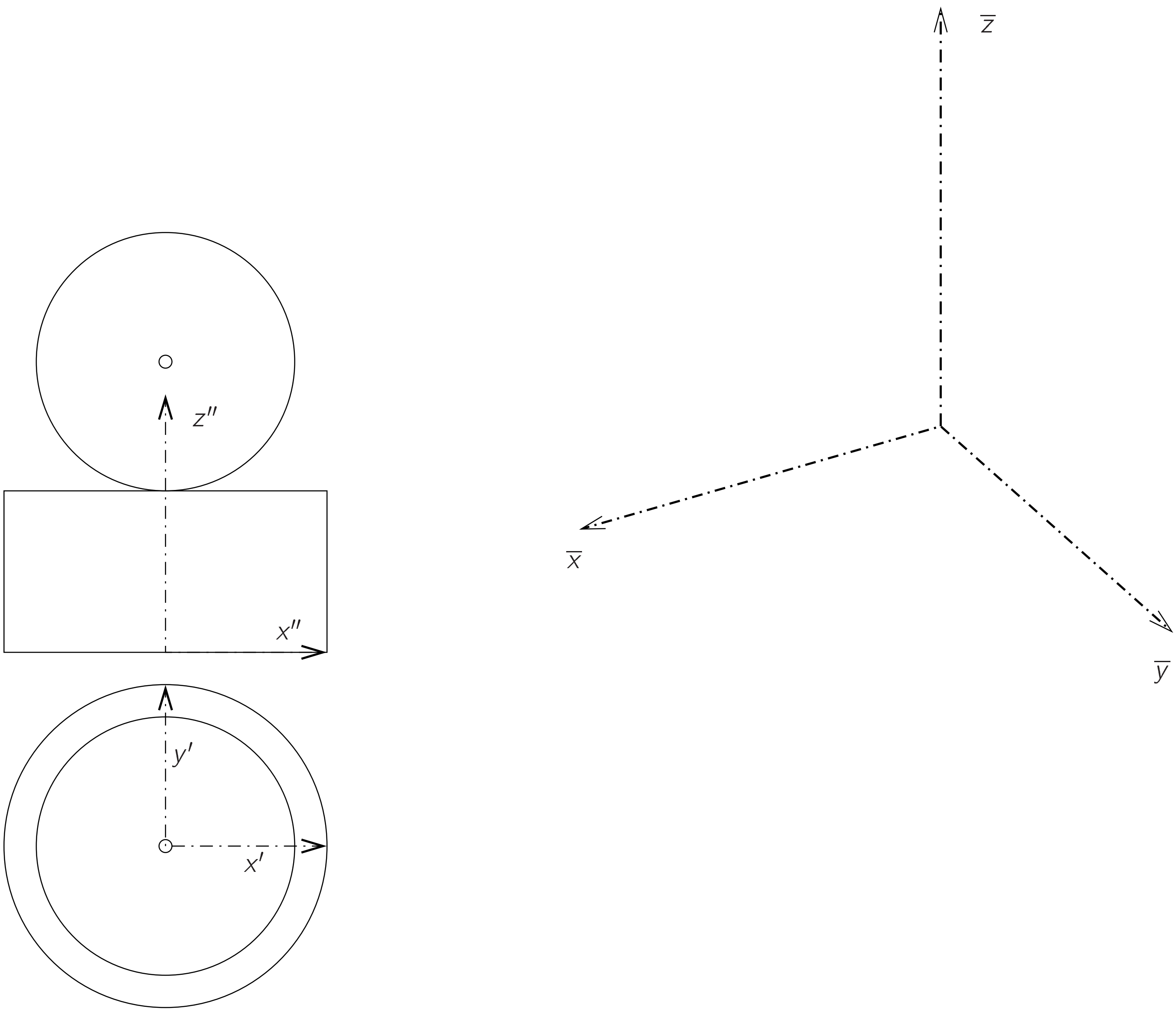


Abbildung 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

4.5 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden g **(Erzeugende)** längs einer ebenen Kurve c **(Leitkurve)** entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** (Abb. 4.12 a)).

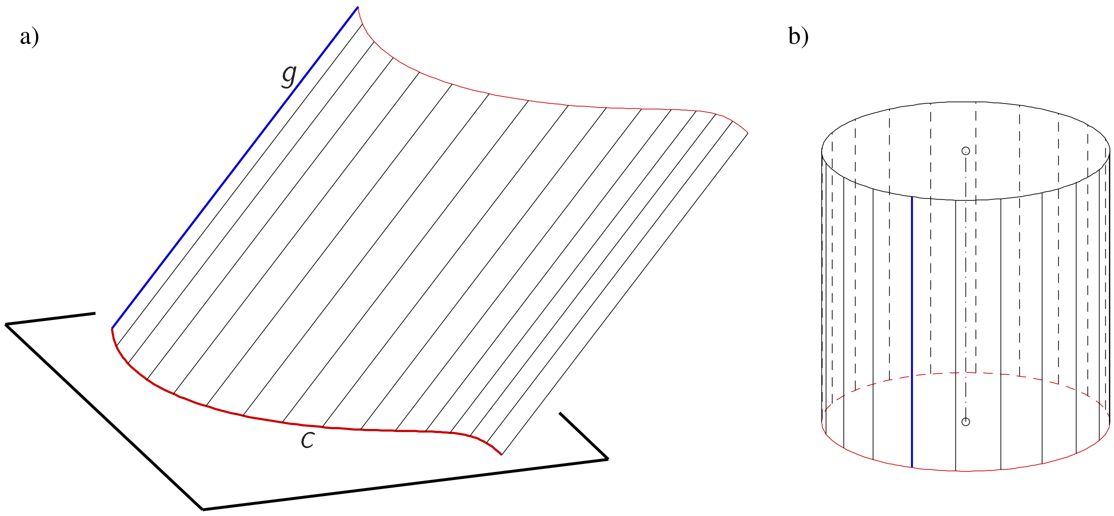


Abbildung 4.12: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszylinders

Ist c speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder** (Abb. 4.12 b)). Die Leitkurve heißt **Basiskreis**, die Erzeugenden heißen **Mantellinien**. Die Symmetriegerade a heißt **Achse**. Da der senkrechte Kreiszylinder auch durch Drehung einer Erzeugenden um die Achse a erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh**- oder **Rotationszylinder**.

Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszylinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.13).

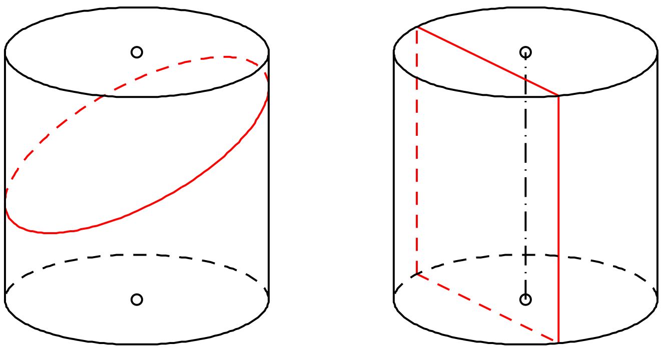


Abbildung 4.13: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders

Gleitet eine Gerade g auf einer ebenen Kurve c und geht g stets durch einen festen Punkt S (Kegel**scheitel** oder -**spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche** (Abb. 4.14 a)).
Ist c speziell ein **Kreis** und liegt S auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M, so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.14 b)). Die Gerade a durch M, S steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch S um a erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh**- oder **Rotationskegel**.

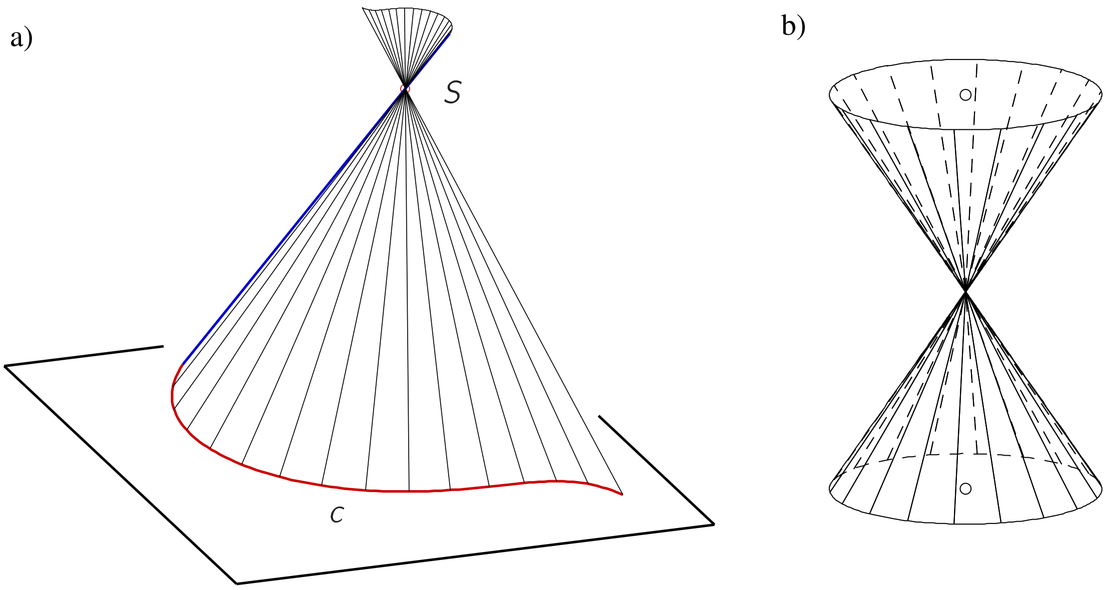


Abbildung 4.14: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene** ε mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze S nicht in der Ebene ε liegt, so sind, je nach Steilheit von ε, folgende Kegelschnitte möglich:

(a)	Kreis	($\varepsilon \perp a$)	(b)	Ellipse	(ε flacher als Mantellinie)
(c)	Parabel	($\varepsilon \parallel$ Mantellinie)	(d)	Hyperbel	(ε steiler als Mantellinie)

Ebenen durch S schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

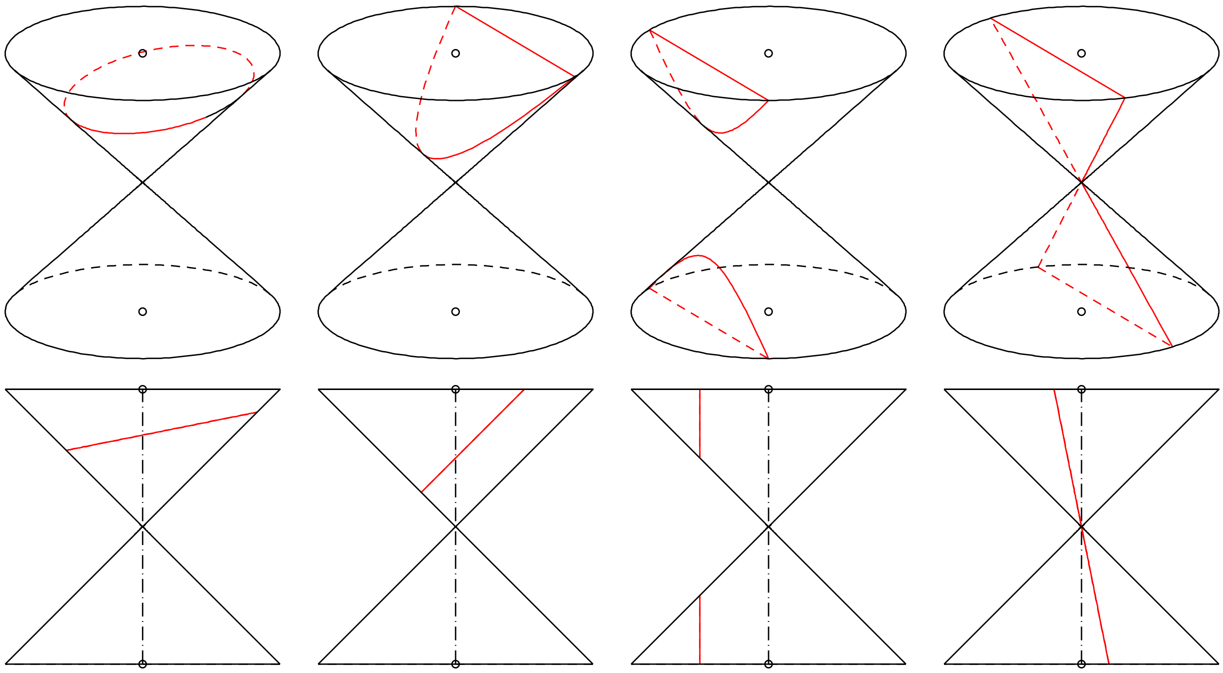


Abbildung 4.15: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

4.6 Abwickelbare Flächen

(s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

Beispiele: a) Zylinder b) Kegel
c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

4.6.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n-Eck) an, „schneidet“ das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.16)

(1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n-Eck.
(2) Nimm die Länge d einer Seite des n-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
(3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante“ k in die Abwicklung.
(4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

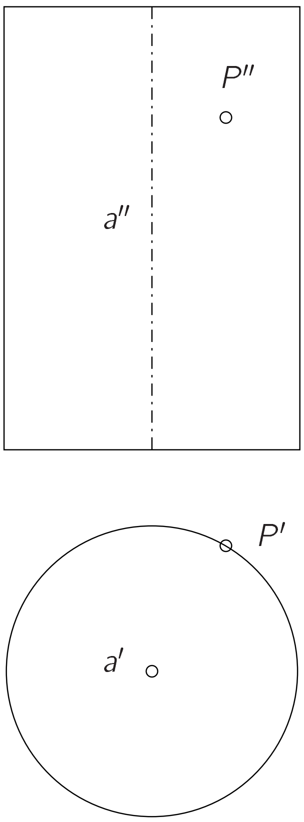


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Zylinders

4.6.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.17).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine n-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu π_2.

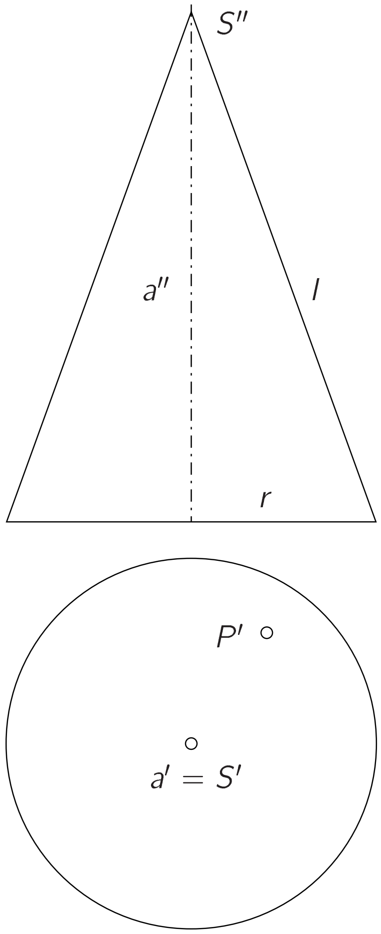
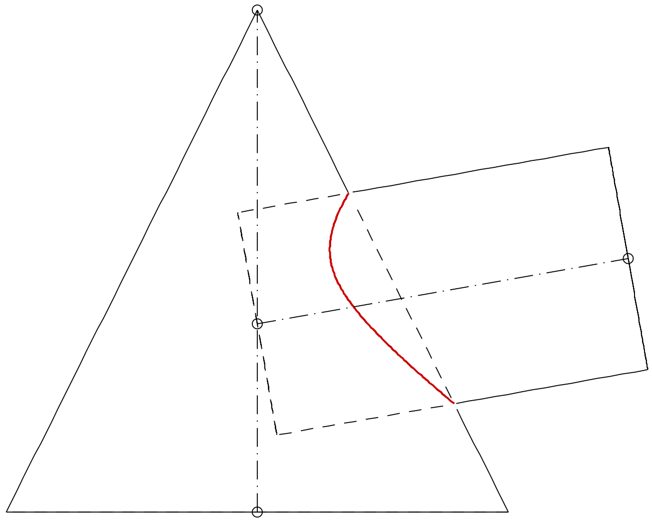


Abbildung 4.17: Abwicklung eines Kegels

Aufgabe 4.6 *Wickle Kegel- und Zylinderteil aus Abb. 4.24 (Durchdringung Kegel–Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus und bastele ein Modell.*



Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

Aufgabe 4.7 *Wickle das Plakat in Abb. 4.18 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

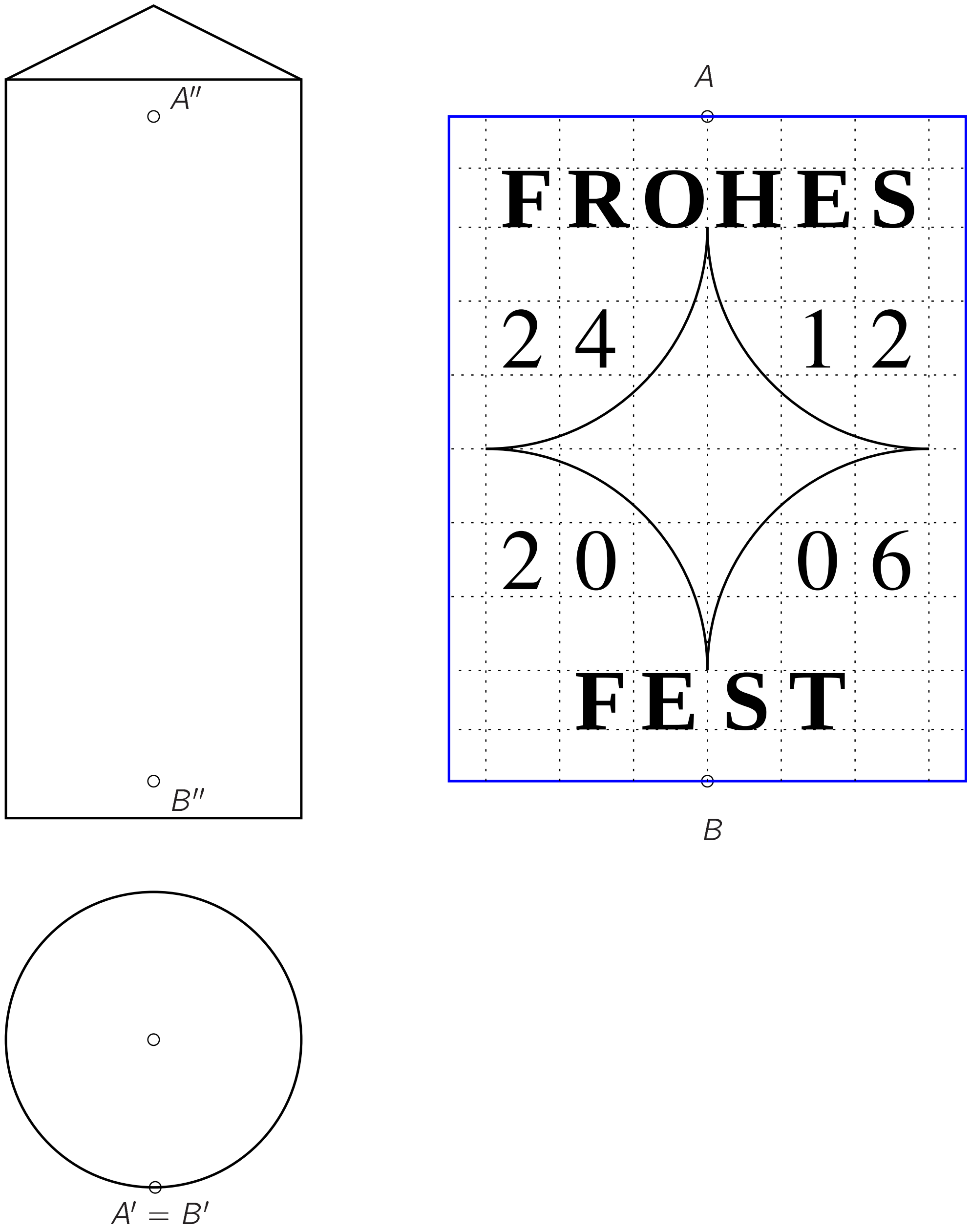


Abbildung 4.18: Aufwicklung auf einen Zylinder

4.7 Durchdringungen

Gegeben: Kurve k und Fläche Φ.
Gesucht: Durchstoßpunkt $S = k \cap \Phi$.
Lösungsidee: Die Kurve wird in eine Hilfsfläche Ψ (meistens: Ebene oder Kugel) so eingebettet, dass die Schnittkurve $h := \Psi \cap \Phi$ (Gerade oder Kreis) einfach zu konstruieren ist. Der/die Durchstoßpunkt(e) ergeben sich dann aus $k \cap h$.

4.7.1 Beispiel 1: Gerade g – Kugel Φ

Gegeben: Gerade g, Kugel mit Mittelpunkt M in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Führe eine neue Risstafel π_3 so ein, dass die Gerade g zu π_3 parallel ist.
2. Wir nehmen an, dass π_3 der Grundrisstafel π_1 zugeordnet ist. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε, die g enthält und parallel zu π_3 ist. ε schneidet aus der Kugel einen **Kreis** c aus, dessen Mittelpunkt M_c in π_3 mit M''' (der Kugel) zusammenfällt.
3. $c''' \cap g'''$ liefert die Durchstoßpunkte D_1''', D_2''' zunächst in π_3.
4. Konstruiere D_1', D_2' und dann D_1'', D_2''.

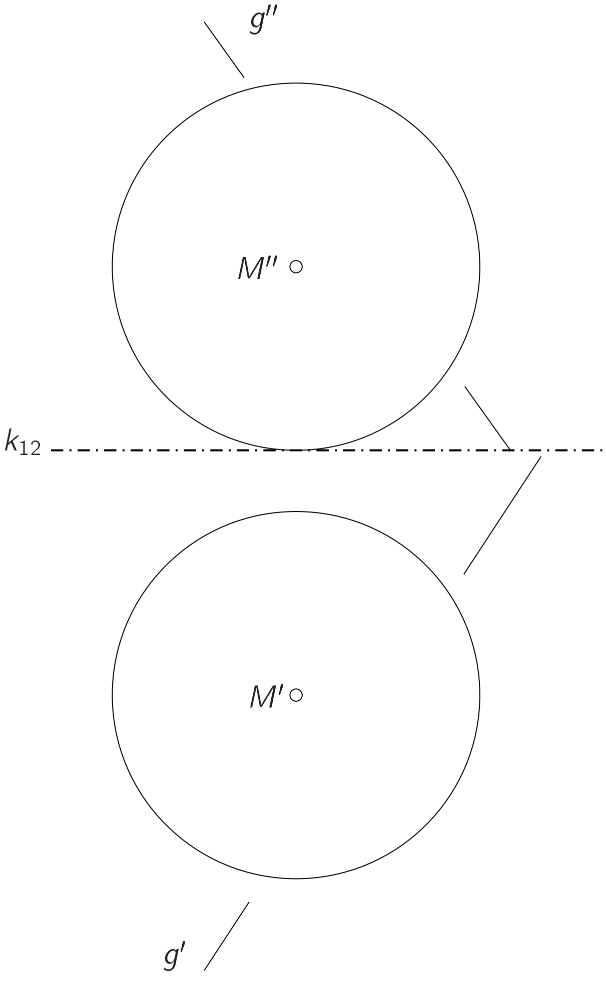


Abbildung 4.19: Schnitt:
Kugel–Gerade

4.7.2 Beispiel 2: Gerade g – Kegel Φ

Gegeben: Gerade g, Kegel mit Spitze S, Achse a, Basiskreis c in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε durch die Kegelspitze S und g. ε schneidet aus dem Kegel zwei Mantellinien l_1, l_2 aus. l_1, l_2 bestimmt man über die Spur s'_ε der Ebene ε. Hierzu schneidet man zwei Geraden von ε (eine Gerade kann g sein) mit π_1.
2. $s'_\varepsilon \cap c'$ liefert Punkte L_1, L_2. Die Gerade durch S und L_1 bzw. L_2 ist die Gerade l_1 bzw. l_2.
3. $D_1 = l_1 \cap g$ und $D_2 = l_2 \cap g$ sind die gesuchten Durchstoßpunkte.

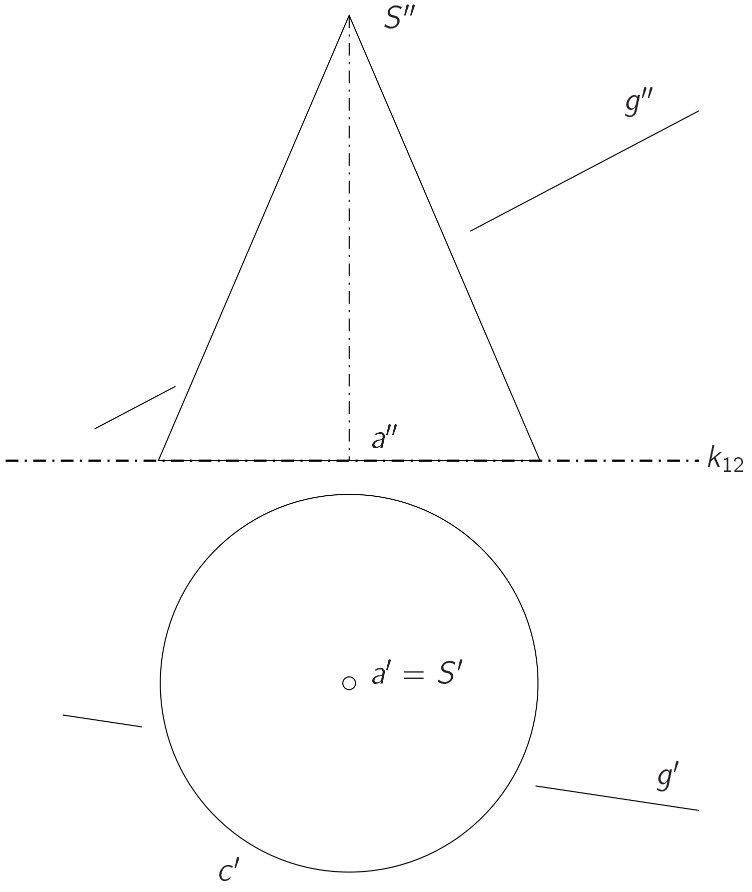


Abbildung 4.20: Schnitt: Kegel–Gerade

4.8 Durchdringungskurve zweier Flächen

Die Durchdringungs– oder Verschneidungskurven zweier Flächen Φ_1, Φ_2 wird i.a. punktweise konstruiert.

Prinzip: Man wählt eine **Hilfsfläche** Ψ, die die gegebenen Flächen Φ_1, Φ_2 in einfachen Kurven (Geraden, Kreise) k_1 und k_2 schneidet. Der Schnitt $k_1 \cap k_2$ liefert einen oder mehrere Punkte von Φ_1 und Φ_2. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine "genügende" Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

4.8.1 Beispiel 1: Hilfsebenen

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2) (Abb. 4.21).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

Durchführung:

1. Wähle eine geeignete Ebene ε und zeichne ε''.
2. Zeichne den Grundriss c' des Schnittkreises $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r) .
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen g', h' zu a_2' im Abstand d.
4. Die (max. vier) Schnittpunkte P', Q' des Kreises c' mit g', h' sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf ε'' erhält man dann P'', Q''.
6. Wiederhole 1.–5. n–mal.
7. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

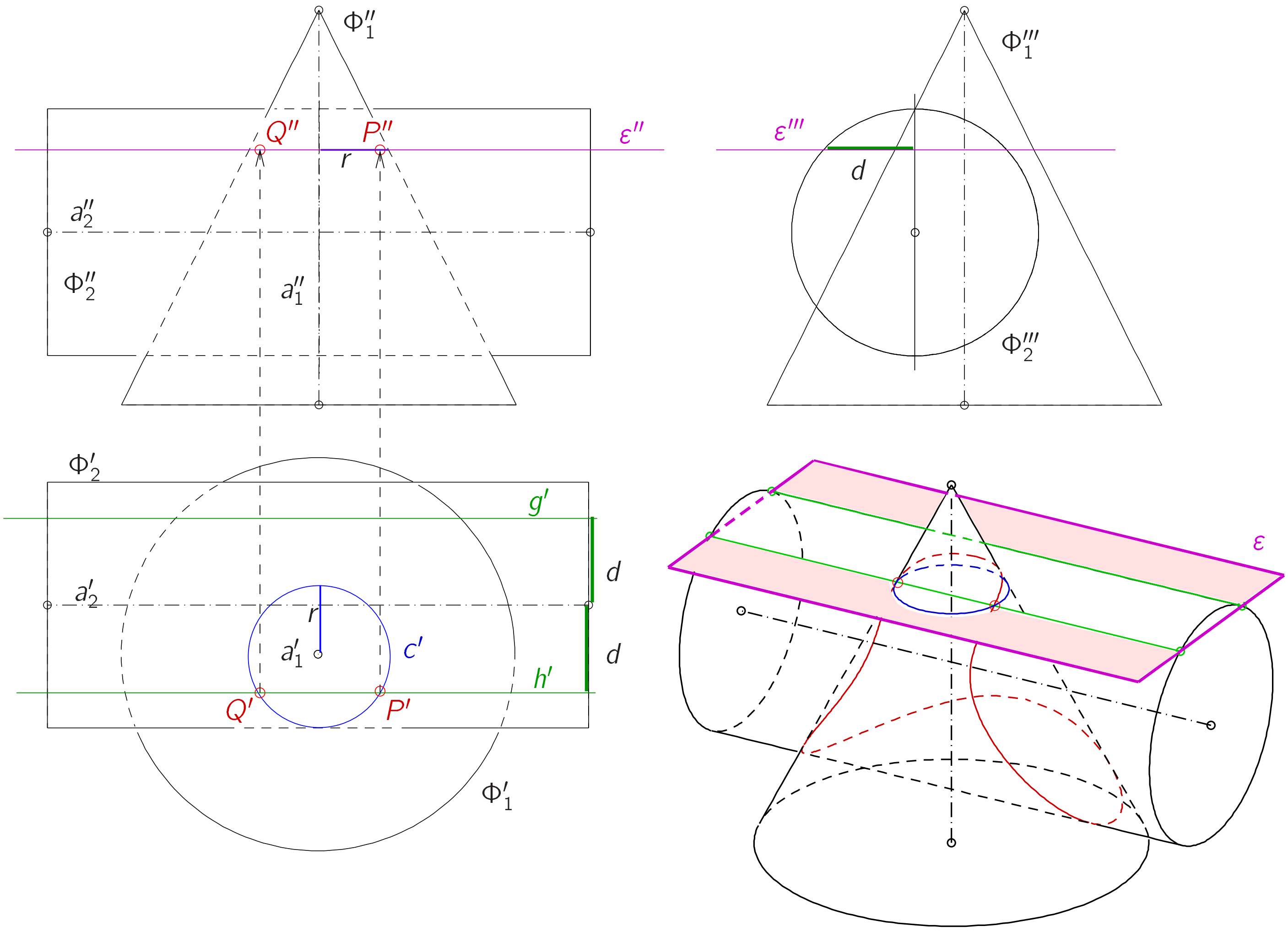


Abbildung 4.21: Schnitt: Kegel–Zylinder

Aufgabe 4.8 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.22).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

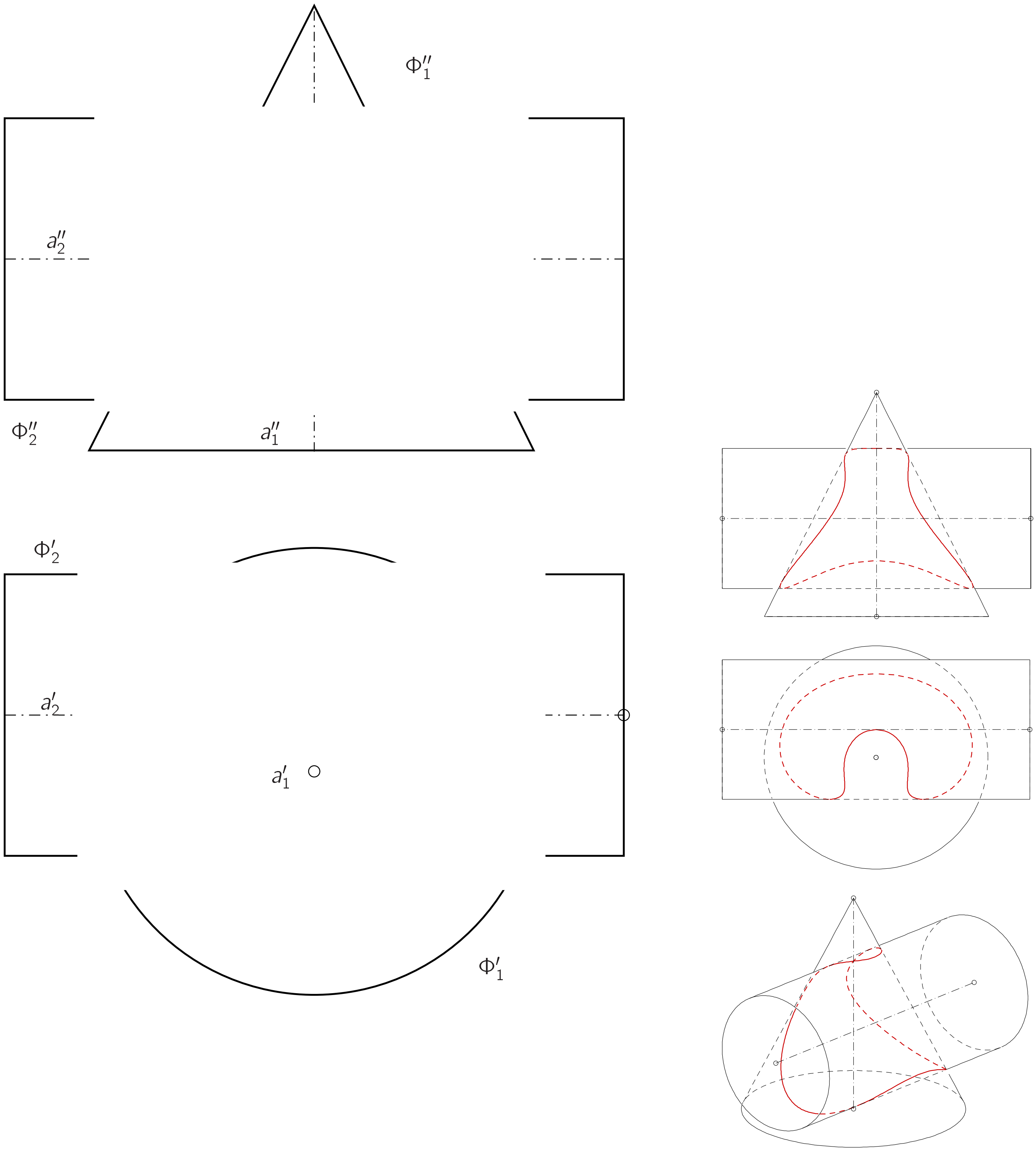


Abbildung 4.22: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

4.8.2 Beispiel 2: Hilfskugeln

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.21).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

Lösungs**idee**: In diesem Beispiel liefern horizontale Schnitte mit dem Zylinder Ellipsen, d.h. nicht einfach zu zeichnende Kurven. Deshalb benutzen wir eine andere Idee: Wir wählen als Hilfsflächen **Kugeln** mit dem Schnittpunkt $M = a_1 \cap a_2$ der Achsen als Mittelpunkt. Solche Kugeln mit geeigneten Radien schneiden sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** als Hilfskurven. Diese Kreise sind alle senkrecht zur Aufrisstafel.

Durchführung:

1. Wähle eine Kugel Ψ mit Mittelpunkt M, die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die Schnittkreise k_1, l_1 der Kugel mit dem Kegel Φ_1 und k_2, l_2 der Kugel mit dem Zylinder Φ_2. Wir verwenden hier nur k_2.
   $k_1'', l_1'', k_2'', l_2''$ sind Strecken, da alle Kreise zu π_2 senkrecht sind.
3. $k_1'' \cap k_2''$ und $l_1'' \cap k_2''$ liefern den Aufriss von max. vier Punkten P, Q, R, S der Durchdringungskurve. Es ist $P'' = Q''$, $R'' = S''$.
4. Zeichne k_1', l_1' und übertrage P, Q, R, S in den Grundriss. P', Q', R', S' liegen auf k_1', l_1'.
5. Wiederhole 1.–4. n–mal.
6. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

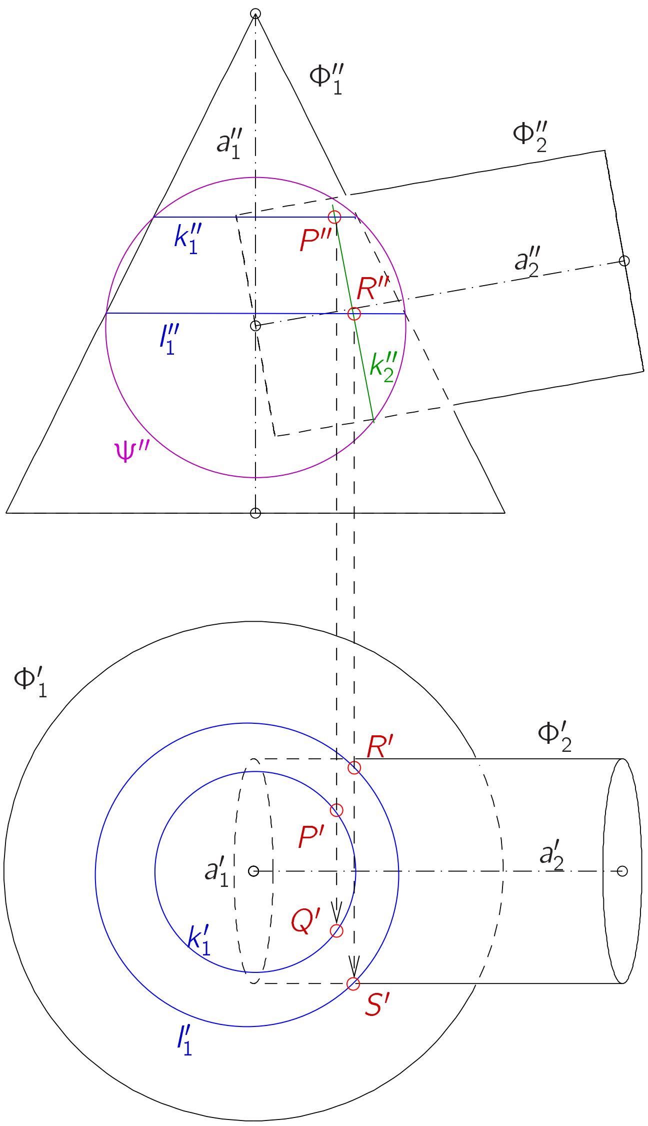


Abbildung 4.23: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverfahren)

Aufgabe 4.9 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.24).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

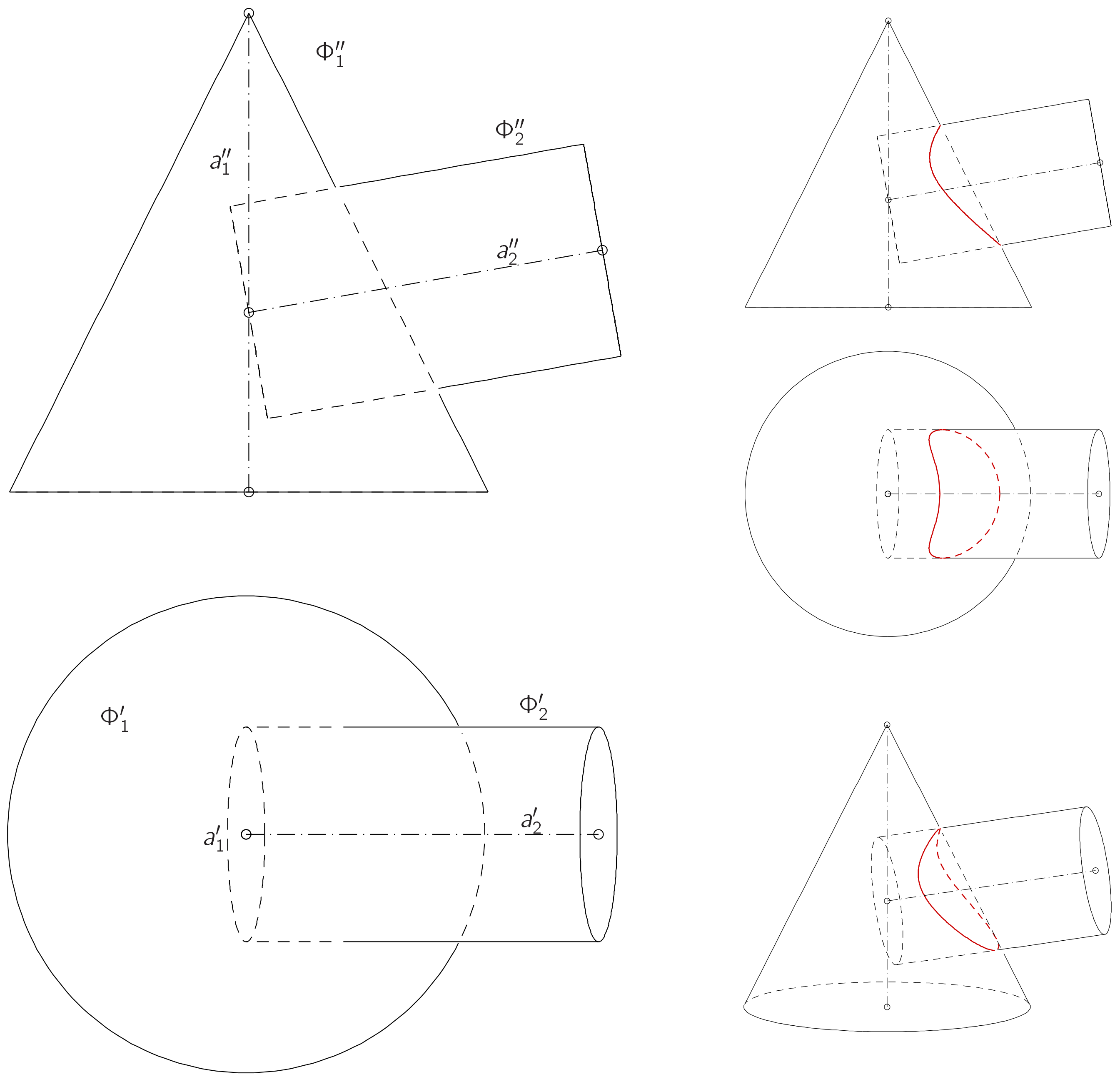


Abbildung 4.24: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverf.)

Bemerkung 1:
a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.
b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Es müssen sich **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven** bei Schnitten mit geeigneten Ebenen ergeben. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

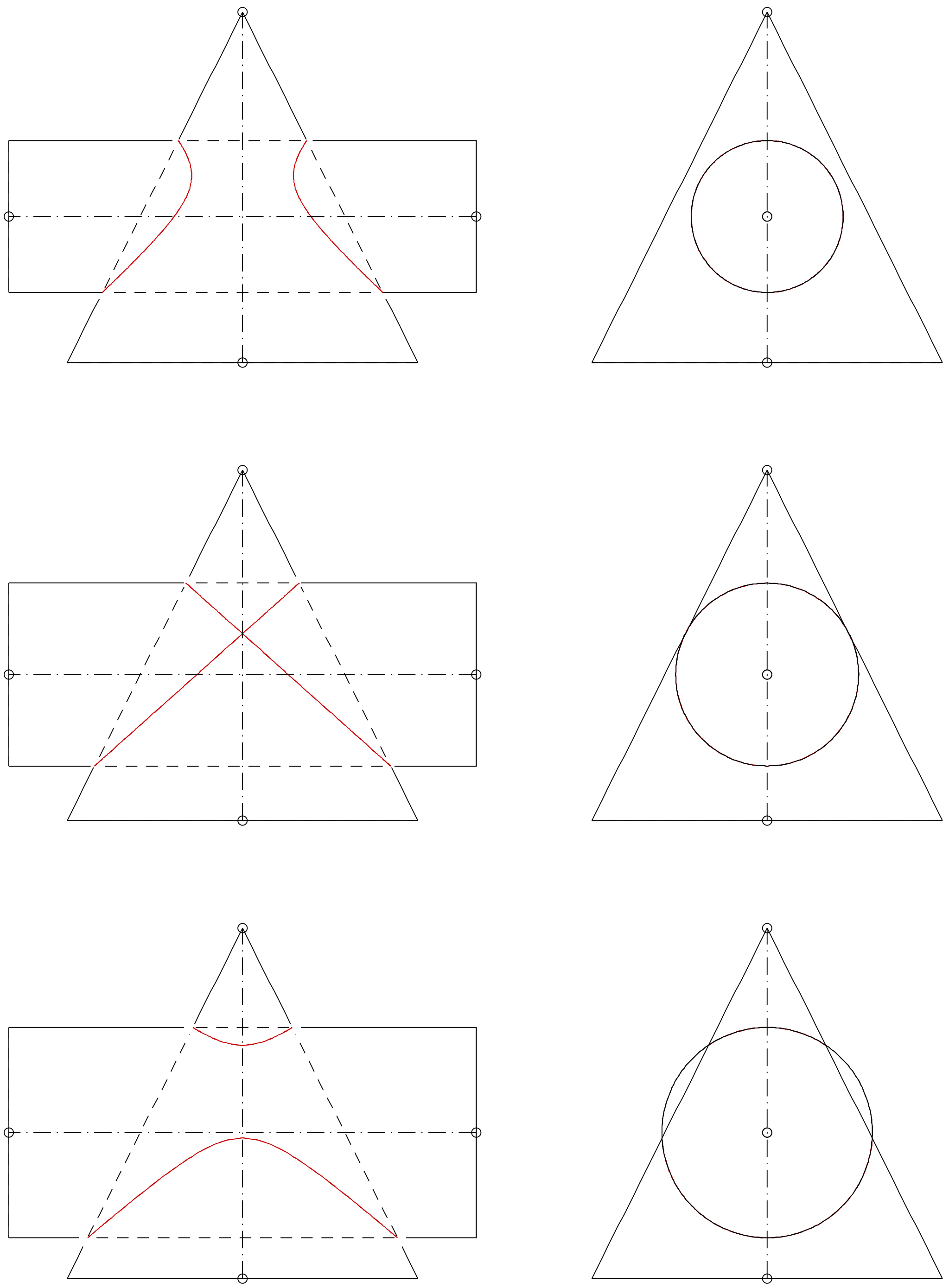


Abbildung 4.25: Schnitt: Kegel–Zylinder (weitere Beispiele)

Bemerkung 2:
a) Haben Flächen in einem Punkt P eine gemeinsame **Berührebene**, so hat ihre Durchdringungskurve in P eine **Spitze** (Abb. 4.25, Mitte).
b) Haben zwei sich schneidende **Drehzylinder** und/oder **Drehkegel** eine gemeinsame **Berührkugel**, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen** (Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.26, und der in der Mitte dargestellte Schnitt von Abb. 4.25).

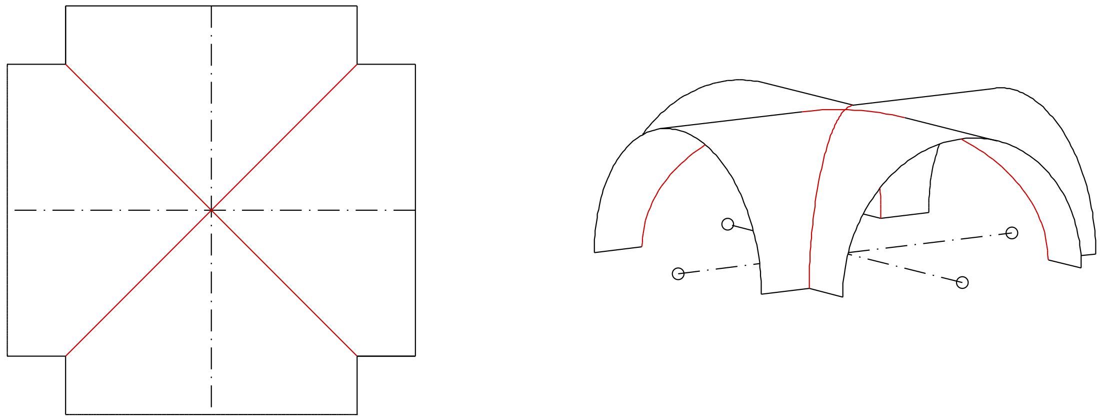


Abbildung 4.26: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

Aufgabe 4.10 :
Gegeben: Lichtkegel K, Zylinder Z, Ebene (Wand) E und Rotationsfläche (Vase) R in Grund– und Aufriss (Abb. 4.28).
Gesucht: Durchdringungskurven in Grund– und Aufriss (sind dies genau die Schattengrenzen?).

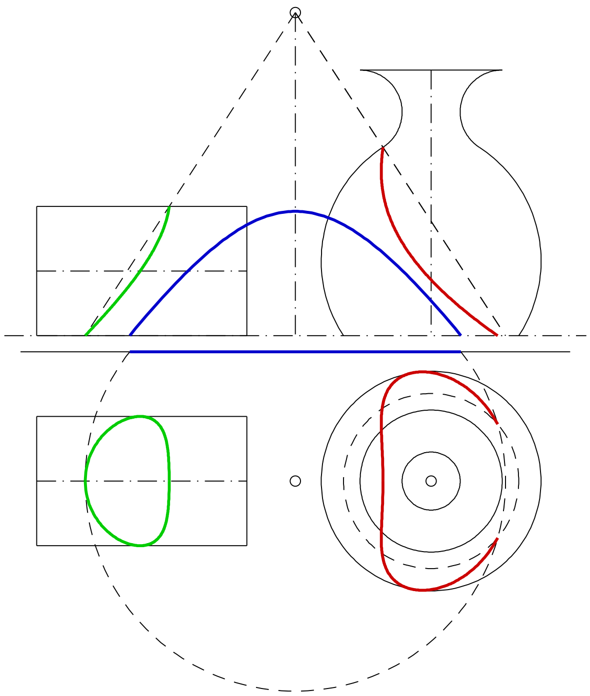


Abbildung 4.27: Durchdringungskurven: Lösung zu Abb. 4.28

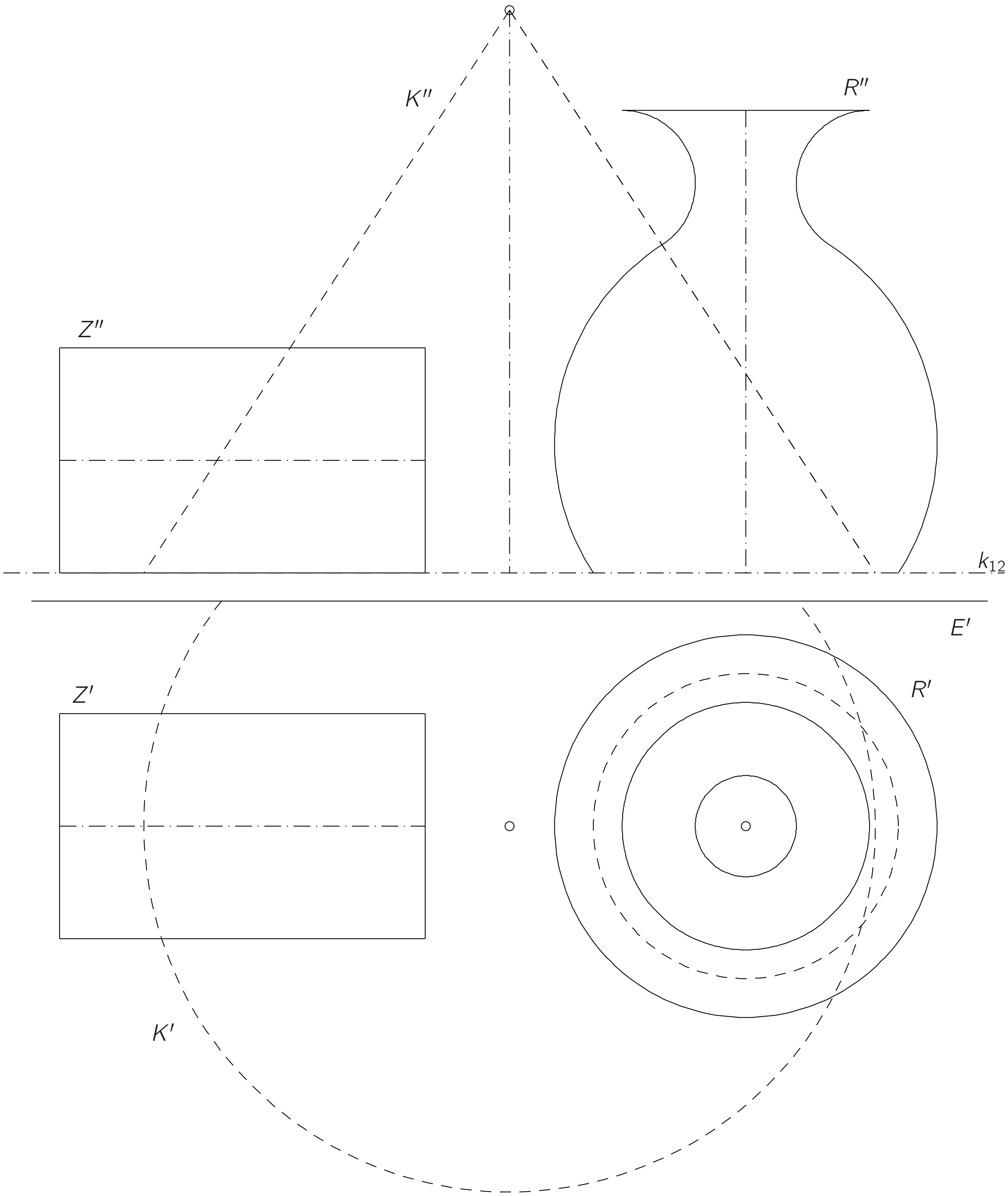


Abbildung 4.28: Durchdringungskurven