4.2 Normalriss eines Kreises

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises (Abb. 4.5):
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k''.
Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir $x-y-$Koordinaten in der Kreisebene und $\xi-\eta-$Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.5, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2+y^2=r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x,y) der Kreisebene den Grundriss (ξ,η) mit $\xi = x$ und $\eta = y\cos\alpha$ hat. Wegen $x^2+y^2=r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta/\cos\alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2/r^2 + \eta^2/(r\cos\alpha)^2 = 1\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren große Halbachse gleich r ist.

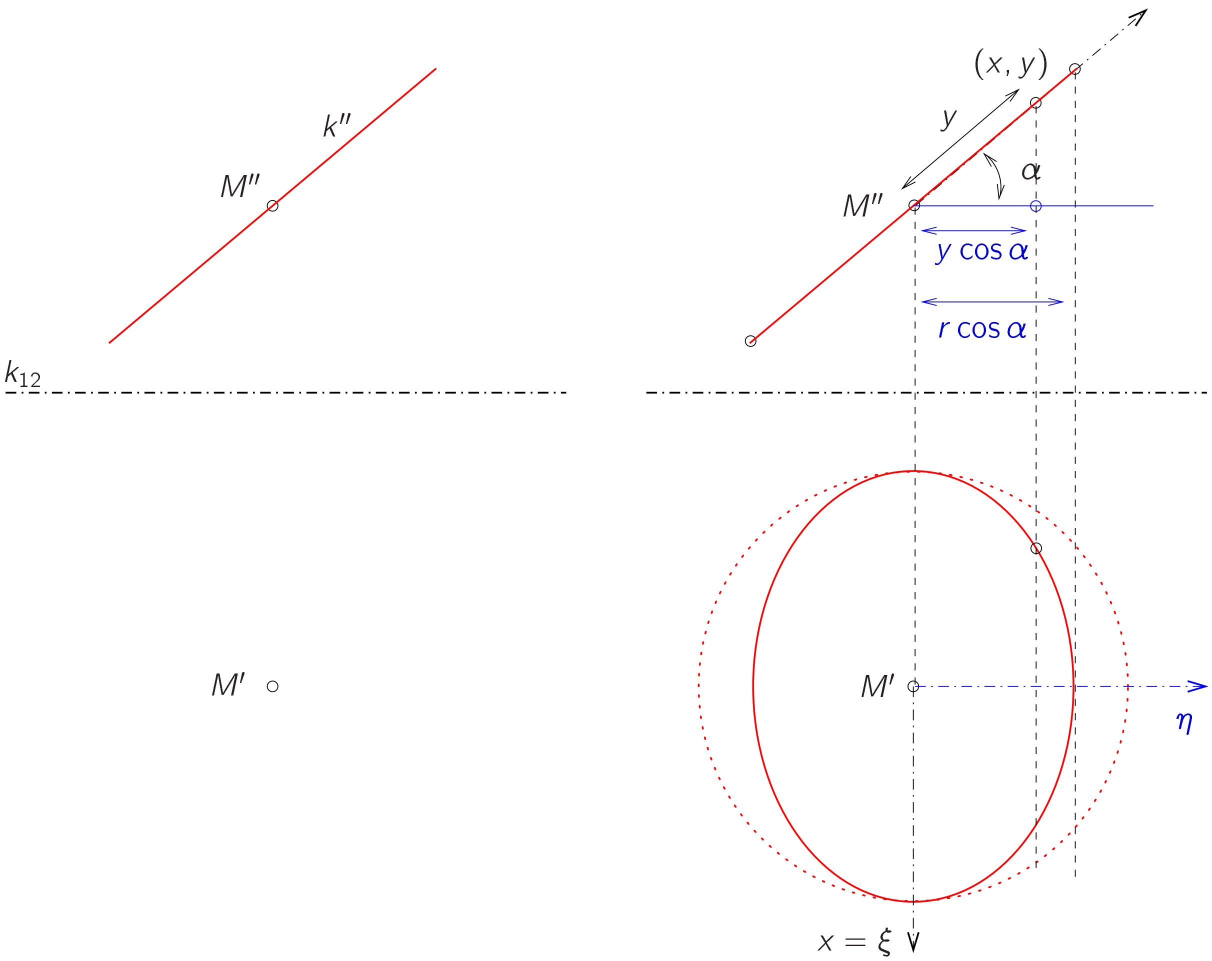


Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

Aufgabe 4.1 *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schreitelkrümmungskreismethode.*

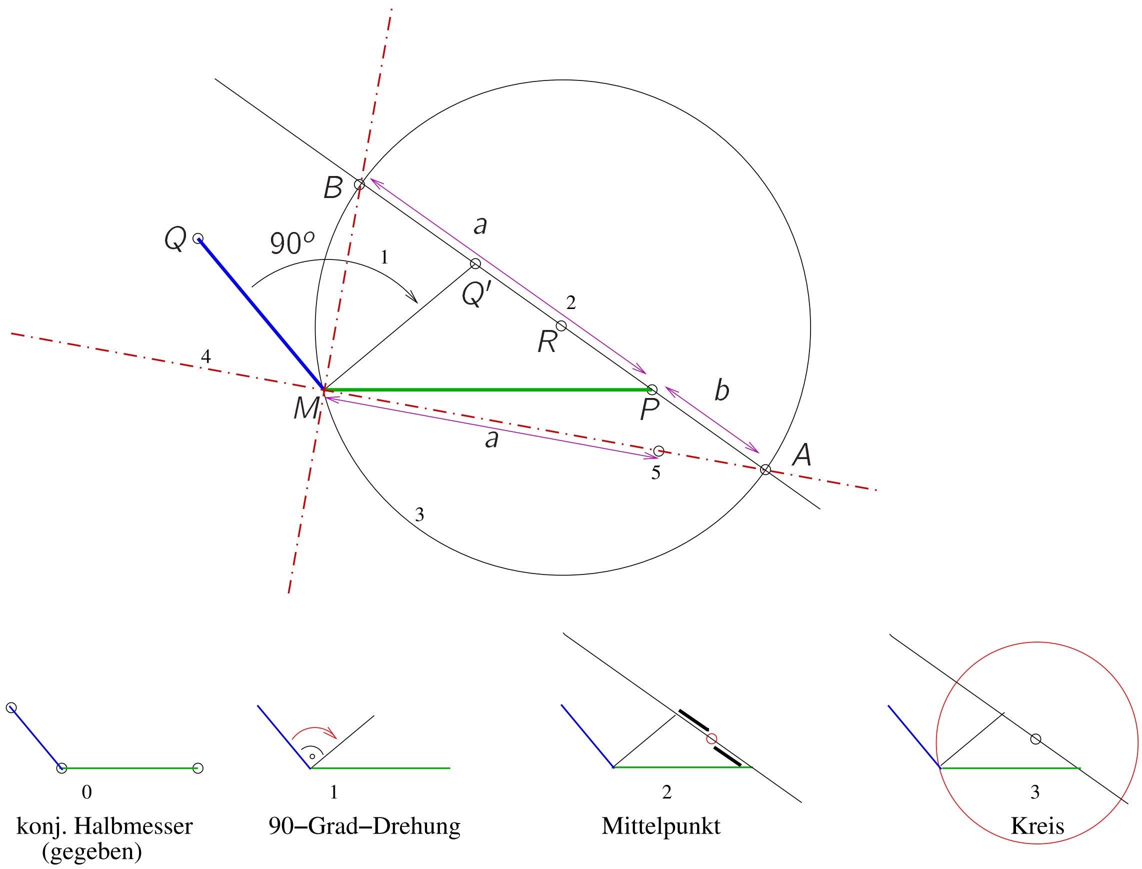


Abbildung 4.7: Rytz–Konstruktion

Aufgabe 4.2 *Bestimme in Abb. 4.8 jeweils zu vorgegebenem Mittelpunkt M und konjugierten Halbmessern $\overline{MP}, \overline{MQ}$ die Scheitel der zugehörigen Ellipse.*

Abbildung 4.8: Aufgaben zur Rytz–Konstruktion

Aufgabe 4.3 *Es sind Grund- und Aufriss eines Kreises und eine weitere Risskante k_{23} gegeben (Abb. 4.9). Bestimme das Bild des Kreises in π_3.*

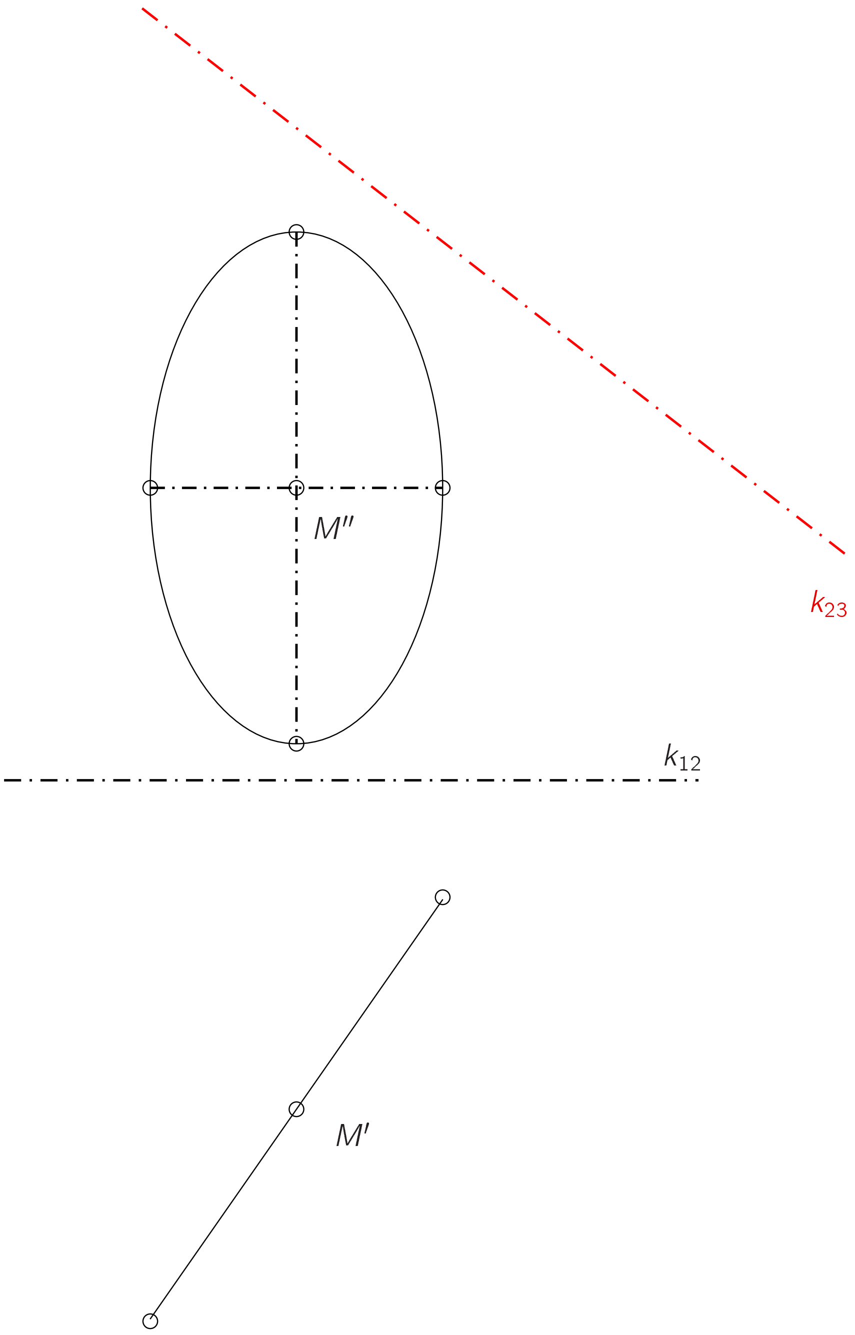


Abbildung 4.9: Umprojektion eines Kreises

4.4 Kreis und Ellipse in der Axonometrie

Das axonometrische **Bild** eines Kreises oder einer Ellipse ist eine **Ellipse** oder eine Strecke.
Im **allgemeinen** Fall geht man so vor:

(1) Bestimme das Bild des Mittelpunktes.
(2) Wähle zwei **konjugierte** Halbmesser im Urbild und bilde diese ab.
(Bei einem Kreis wählt man zwei senkrechte Halbmesser, die sich „leicht“ abbilden lassen. Bei einer Ellipse wählt man zwei senkrechte Haupthalbachsen.)
(3) Bestimme die Hauptachsen der Bildellipse mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion.
(4) Zeichne die Ellipse z.B. mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.

Es gibt einige Sonderfälle:

a) Falls die Ellipse **parallel zur Bildtafel** liegt, wird sie **unverzerrt** abgebildet.
b) Der zur Bildtafel parallele Durchmesser eines **Kreises** wird unverzerrt abgebildet und ist im Falle einer **senkrechten** Projektion gleich der großen Halbachse der Bildellipse.

Aufgabe 4.4 *:*
Gegeben: Grund– und Aufriss eines Zylinderstumpfes (Abb. 4.10).
Gesucht: Isometrische Vogelperspektive des Zylinderstumpfes.

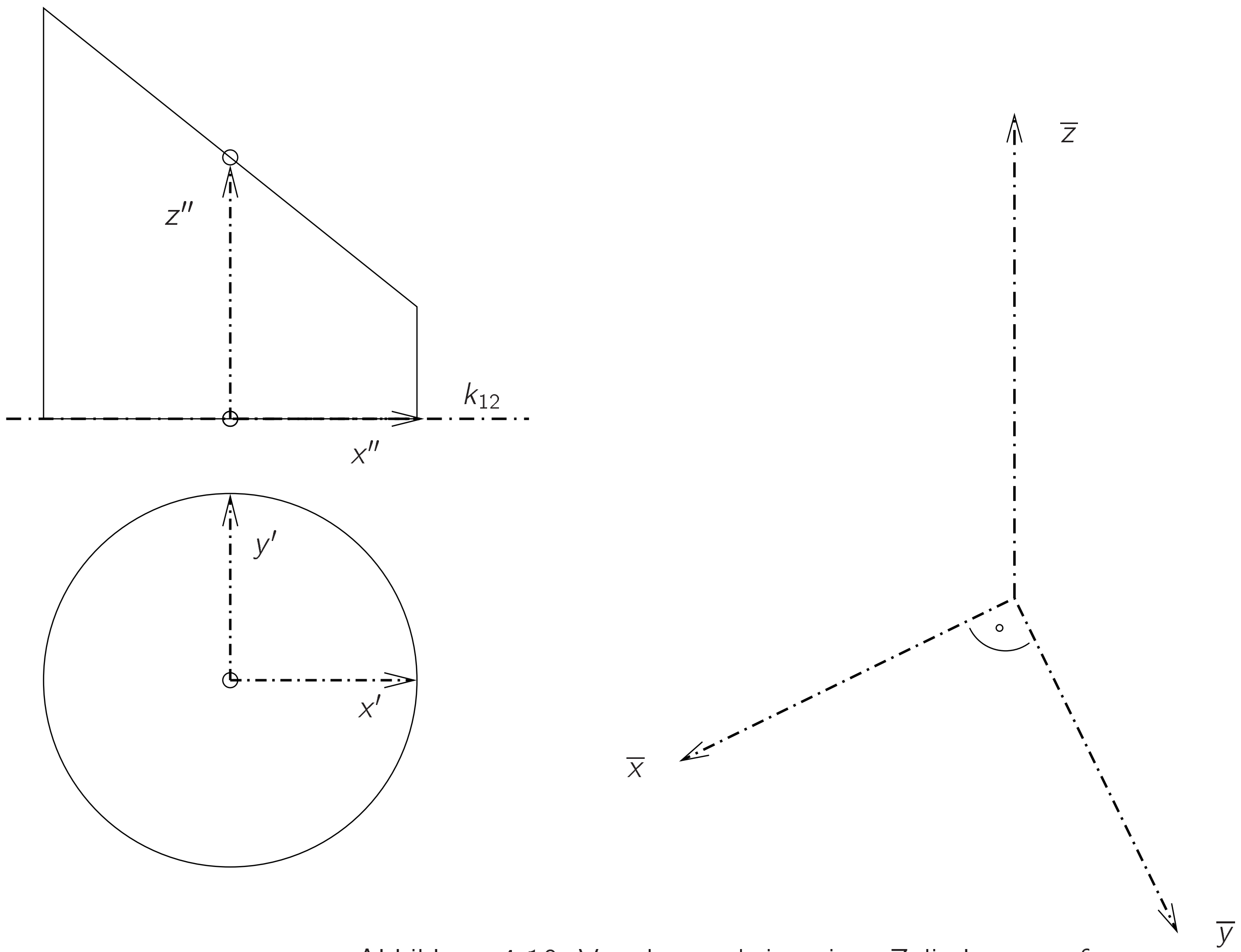


Abbildung 4.10: Vogelperspektive eines Zylinderstumpfes

Aufgabe 4.5 *:*
Stelle den in Grund– und Aufriss gegebenen Zylinder mit aufgesetzter Kugel mit Hilfe des Einschneideverfahrens in **senkrechter** *Axonometrie dar (s. Abschnitt 3.6).*
(Für die Bildellipsen der Zylinder-Kreise ist **kein Rytz** *nötig ! Die großen Hauptachsen sind parallel zur Grundrissspur und gleich dem Durchmesser der Kreise. Zur Bestimmung der Länge der kleinen Halbachse bilde man einen geeigneten Kreispunkt ab und beachte Abb. 4.3, links)*

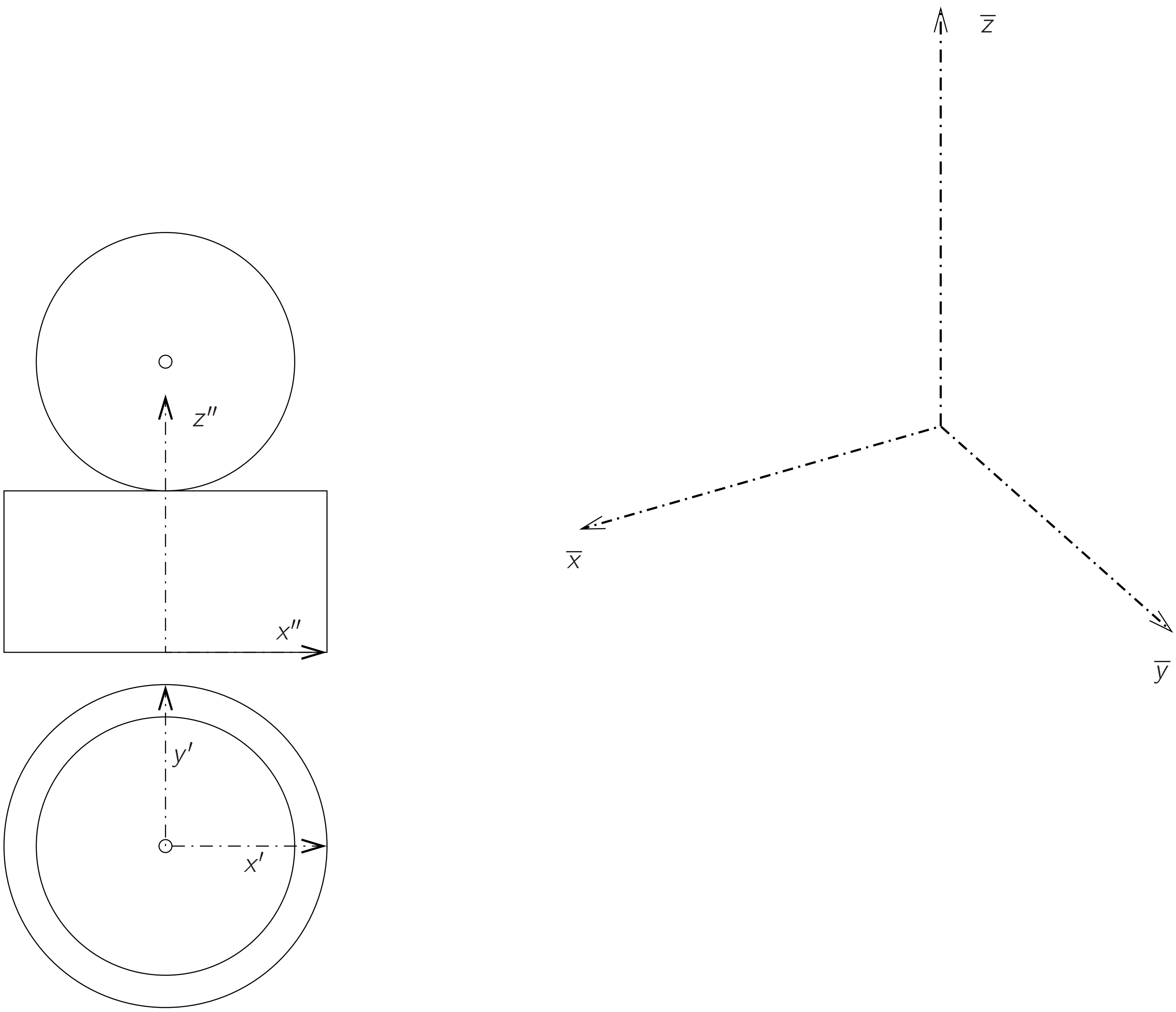


Abbildung 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

4.6 Abwickelbare Flächen (s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

Beispiele: a) Zylinder b) Kegel
c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

4.6.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n-Eck) an, „schneidet" das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.16)

(1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n-Eck.
(2) Nimm die Länge d einer Seite des n-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
(3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante" k in die Abwicklung.
(4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

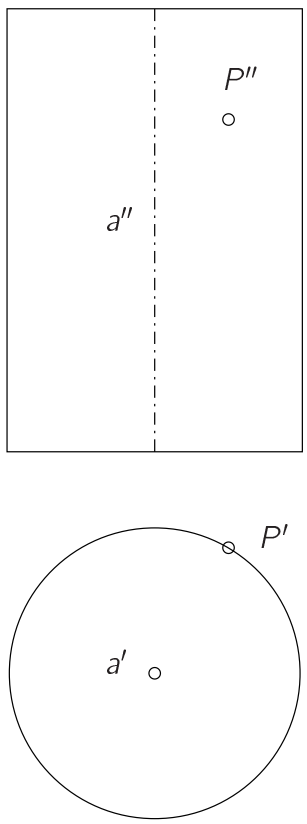


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Zylinders

4.6.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.17).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine n-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu π_2.

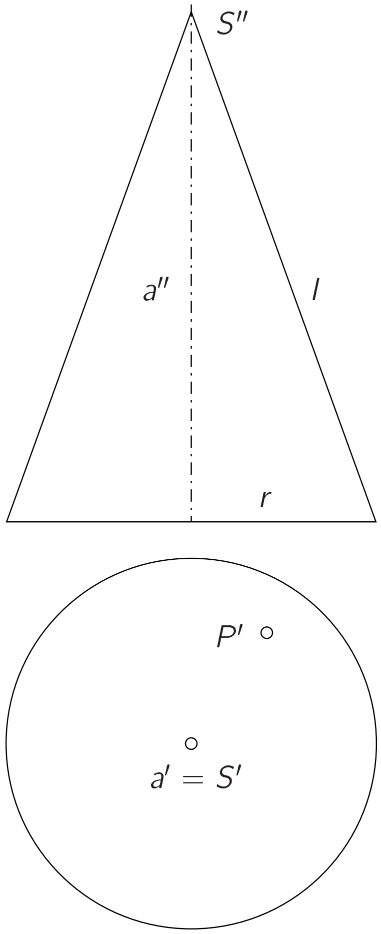
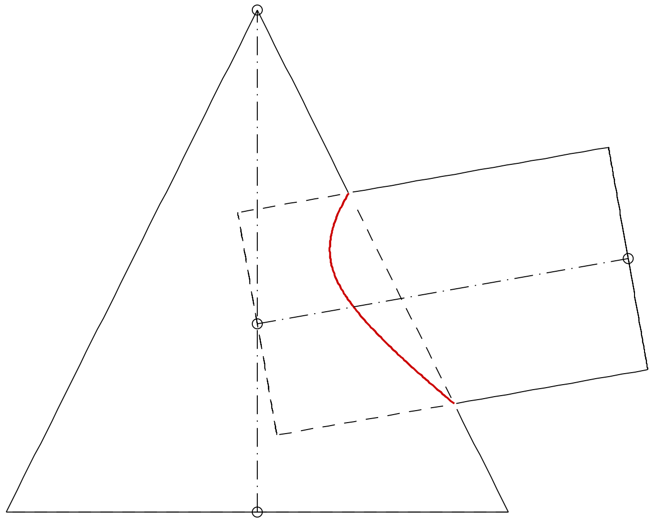


Abbildung 4.17: Abwicklung eines Kegels

Aufgabe 4.6 *Wickle Kegel- und Zylinderteil aus Abb. 4.24 (Durchdringung Kegel–Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus und bastele ein Modell.*



Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

Aufgabe 4.7 *Wickle das Plakat in Abb. 4.18 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

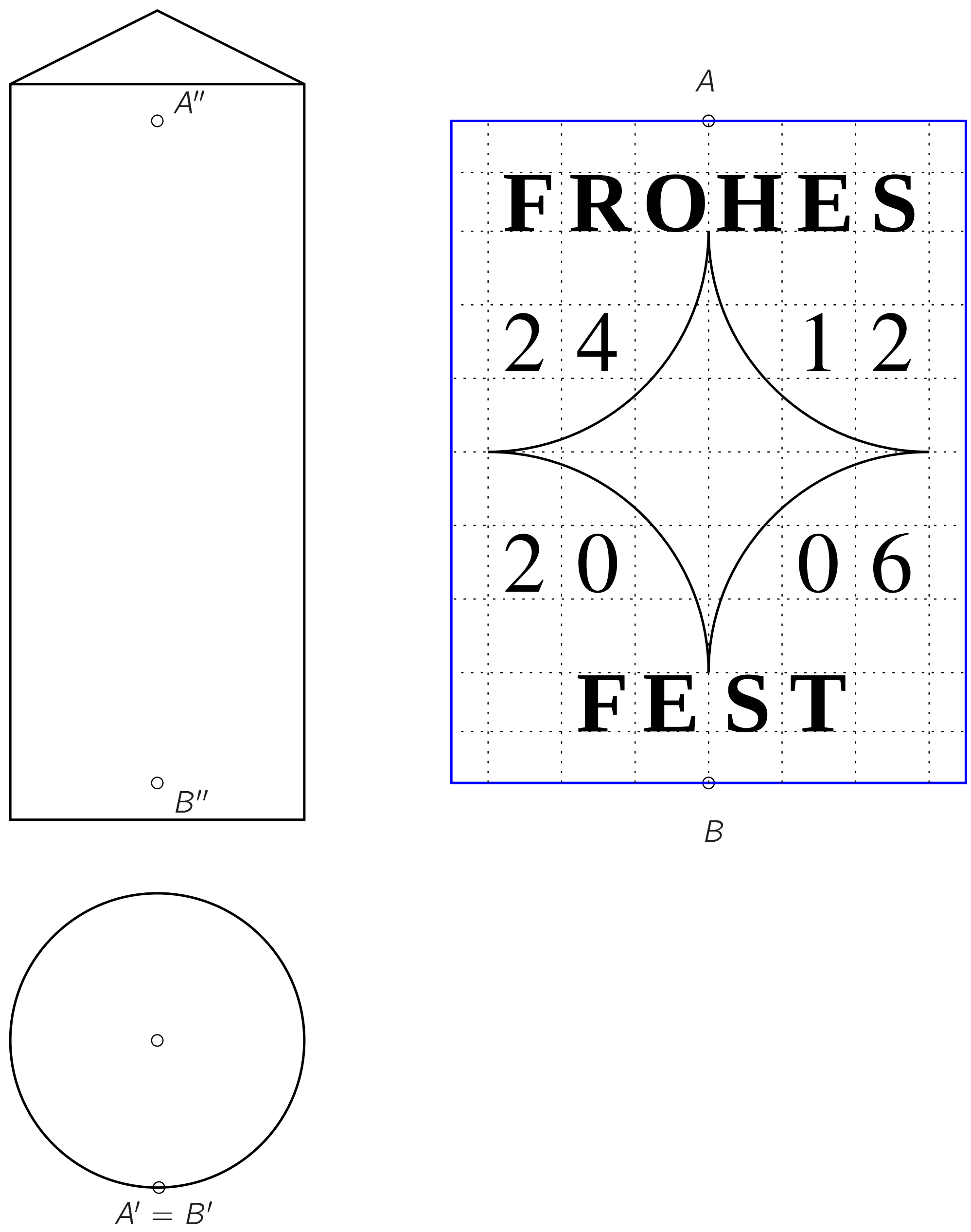


Abbildung 4.18: Aufwicklung auf einen Zylinder

4.8.1 Beispiel 1: Hilfsebenen

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2) (Abb. 4.21).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

Durchführung:

1. Wähle eine geeignete Ebene ε und zeichne ε''.
2. Zeichne den Grundriss c' des Schnittkreises $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r) .
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen g', h' zu a_2' im Abstand d.
4. Die (max. vier) Schnittpunkte P', Q' des Kreises c' mit g', h' sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf ε'' erhält man dann P'', Q''.
6. Wiederhole 1.–5. n–mal.
7. Verbinde die Punkte in der “richtigen” Reihenfolge mit einer Kurve.

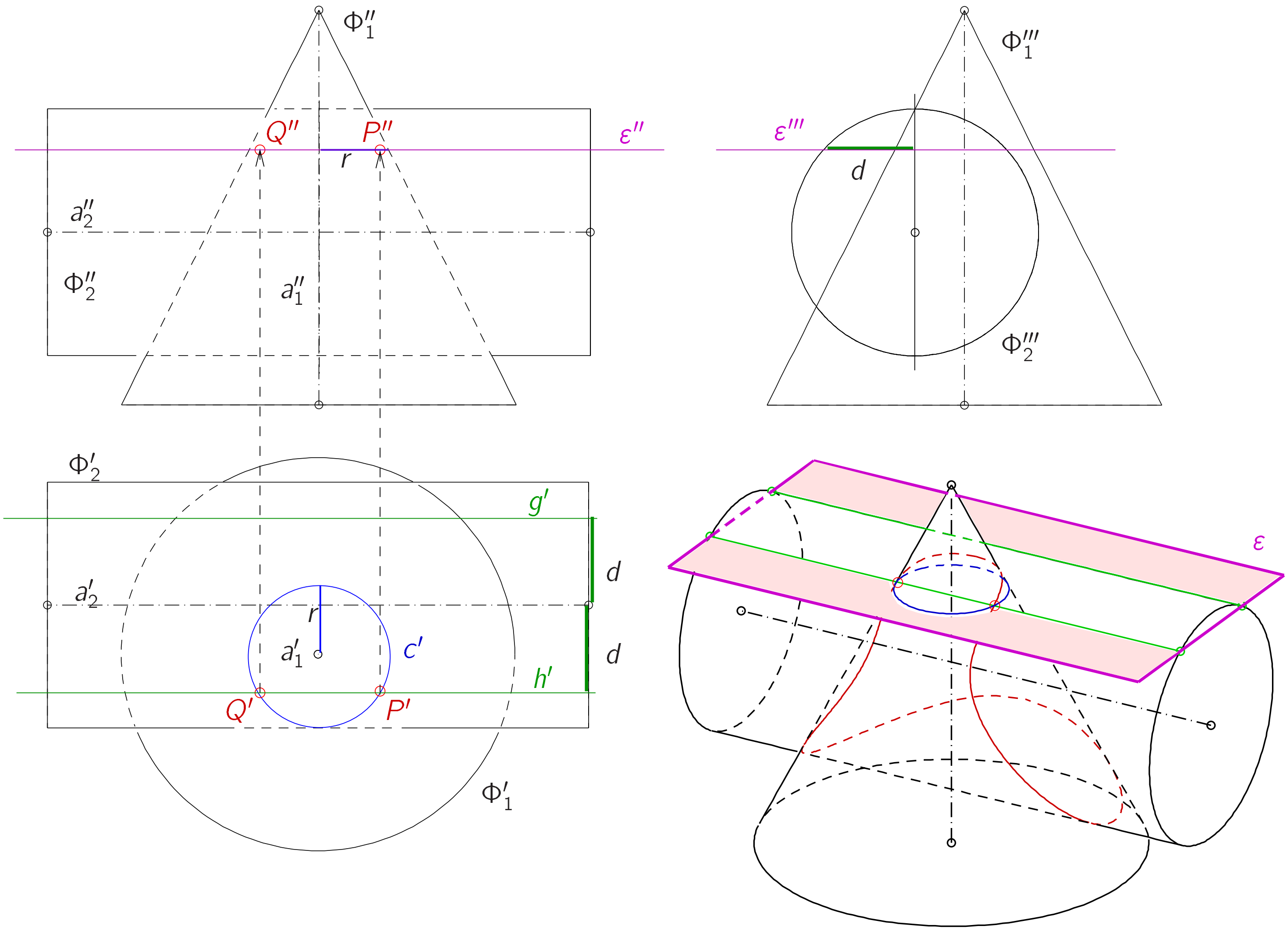
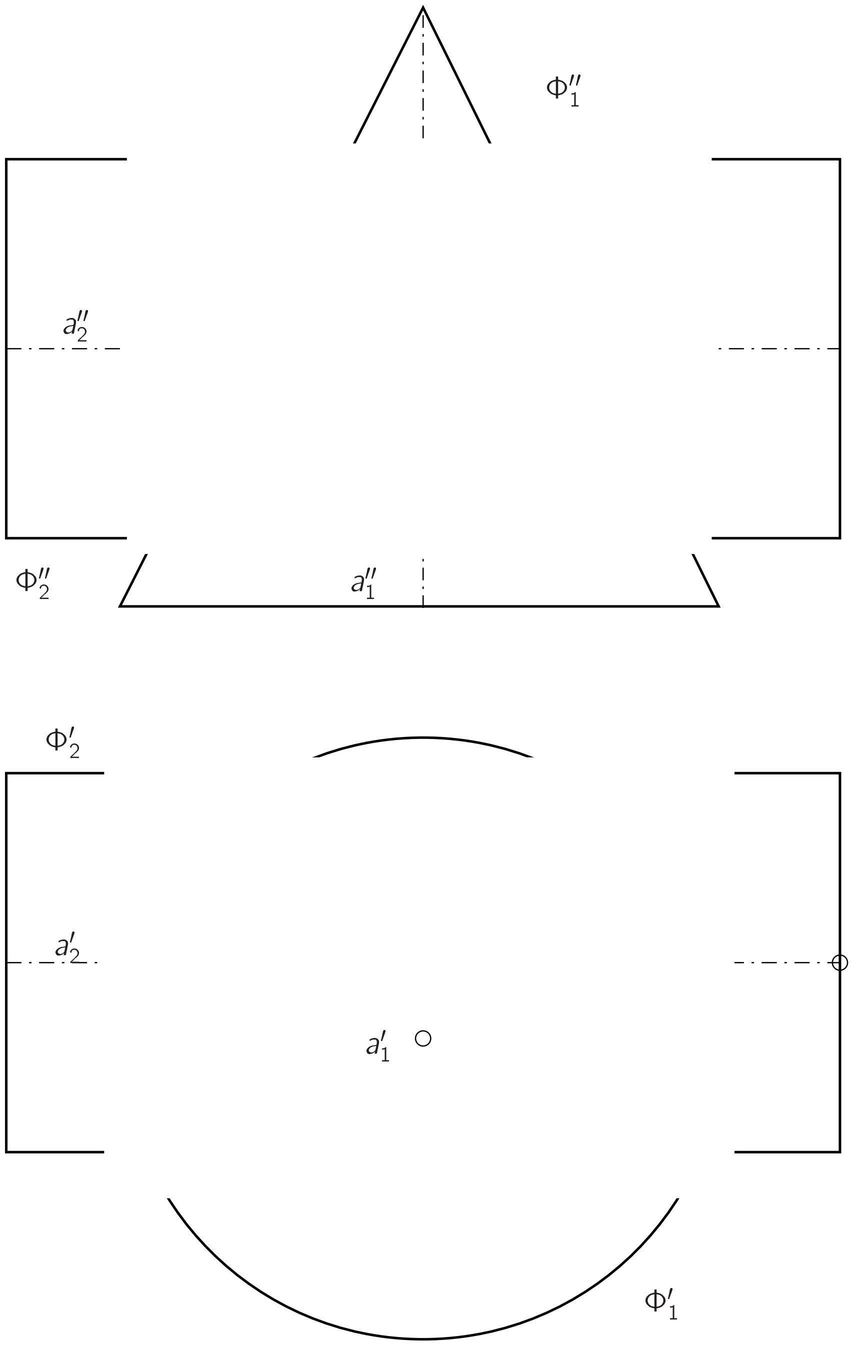


Abbildung 4.21: Schnitt: Kegel–Zylinder

Aufgabe 4.8 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.22).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.



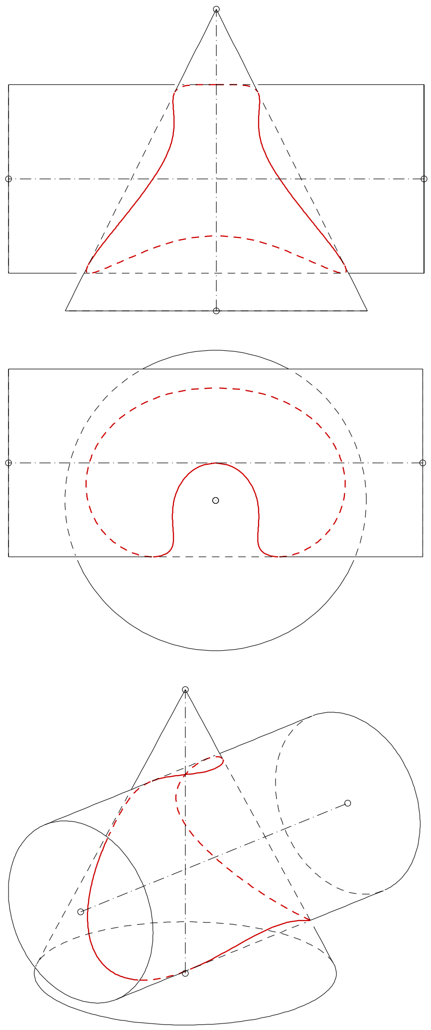


Abbildung 4.22: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

4.8.2 Beispiel 2: Hilfskugeln

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.21).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

Aufgabe 4.9 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.24).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

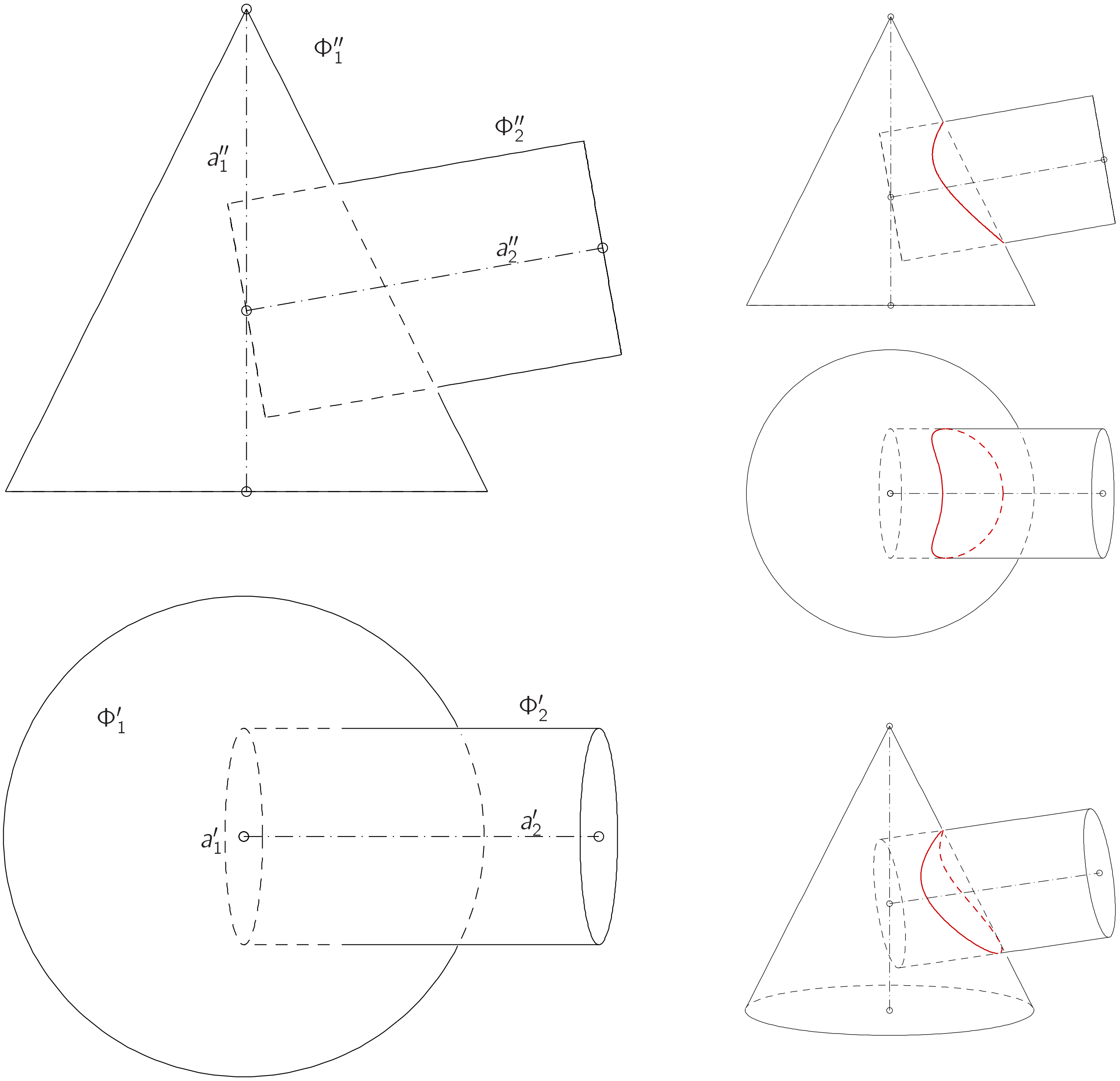


Abbildung 4.24: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverf.)