5 Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen

In diesem Kapitel betrachten wir eine Methode zur Lösung linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung, die sich anwenden läßt, wenn sich alle Koeffizienten und die rechte Seite in Potenzreihen entwickeln lassen. Die Lösung erhält man dann ebenfalls in Form einer Potenzreihe.

5.1 Potenzreihenansatz

Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns darauf, den Potenzreihenansatz für Gleichungen zweiter Ordnung zu betrachten. Es ist also

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x) \tag{5.1}$$

auf einem Intervall $(-r, r) \subseteq \mathbb{R}$, wobei wir voraussetzen, dass sich p, q und f durch auf $(-r, r)$ konvergente Potenzreihen darstellen lassen, also reell-analytische Funktionen sind:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \tag{5.2}$$

Es liegt nahe, als Lösungsansatz für (5.1) anzunehmen, die Lösung hätte eine in $(-r, r)$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5.3}$$

Wir versuchen, die Koeffizienten a_n zu bestimmen. Nach Satz 9.13 aus der Vorlesung Analysis II ist

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

und

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Einsetzen in (5.1) ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right)$$

$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Mit der Cauchyschen Produktformel folgt weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right)x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

woraus wir schließlich durch Koeffizientenvergleich für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} = f_n.$$

Dies ist eine Rekursionsformel zur Bestimmung der a_n. Wir wählen a_0 und a_1 (z. B. entsprechend den Anfangsbedingungen) und berechnen schrittweise $a_2, a_3, ...$ aus

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(f_n - \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) \tag{5.4}$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Falls also eine Lösung von (5.1) in der Form (5.3) existiert, so sind die Koeffizienten $a_2, a_3, ...$ eindeutig bestimmt durch a_0 und a_1. Mehr Freiheitsgrade kann man nicht erwarten, da ja die Lösung von (5.1) durch Vorgabe von $y(0) = a_0$ und $y'(0) = a_1$ eindeutig bestimmt wird.

Nachdem wir (5.4) gewonnen haben, gehen wir nun umgekehrt vor. Zu beliebig gewählten Werten a_0, a_1 definieren wir a_n für $n \geq 2$ durch (5.4) und zeigen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ konvergiert. Aus unserer Herleitung folgt dann, dass

$$y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

auf $(-r, r)$ eine Lösung von (5.1) ist und dass man bei entsprechender Wahl von a_0 und a_1 alle Lösungen auf diesem Weg gewinnen kann.

Sei also $|x| < r$. Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert. Dazu wählen wir $\delta \in (|x|, r)$. Nach Voraussetzung konvergieren die Reihen für p, q und f in δ absolut. Insbesondere gibt es ein C mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|\delta^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|\delta^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\delta^n \quad \leq C.$$

Wir setzen noch $A_n := \max\{|a_k|\delta^k : k \leq n\}$ und wollen $A_{n+1} \leq 1 + A_n$ für alle hinreichend großen n zeigen. Mit (5.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}|\delta^{n+2} &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(|f_n|\delta^n\delta^2 + \sum_{k=0}^{n}(k+1)|a_{k+1}|\delta^{k+2}|p_{n-k}|\delta^{n-k}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{k=0}^{n}|a_k|\delta^{k+2}|q_{n-k}|\delta^{n-k}\right)\\
&\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C\delta^2 + A_{n+1}(n+1)C\delta + A_nC\delta^2)\\
&\leq \frac{C}{n+2}(\delta^2 + A_{n+1}(\delta+\delta^2)) \leq 1 + A_{n+1}
\end{aligned}$$

falls $n \geq N-1$ und N hinreichend groß. Es ist also

$$|a_{n+1}|\delta^{n+1} \leq 1 + A_n \quad \text{falls } n \geq N.$$

Für $k \leq n$ ist wegen der Monotonie der Folge (A_n)

$$|a_k|\delta^k \leq A_k \leq A_n \leq 1 + A_n,$$

so dass wir

$$A_{n+1} \leq 1 + A_n \quad \text{für alle } \ n \geq N$$

erhalten. Sukzessive finden wir weiter

$$A_{N+1} \leq 1 + A_N, \quad A_{N+2} \leq 1 + A_{N+1} \leq 2 + A_N, ...$$

und daher $A_{N+k} \leq k + A_N$ für alle $k \geq 1$. Es gibt also ein $D > 0$ mit

$$|a_n|\delta^n \leq D(n+1) \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus ergibt sich

$$|a_n||x|^n = |a_n|\left(\frac{|x|}{\delta}\right)^n\delta^n \leq D\left(\frac{|x|}{\delta}\right)^n(n+1).$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} D\left(\frac{|x|}{\delta}\right)^n(n+1)$ (beachte: $\frac{|x|}{\delta} < 1$) folgt nun die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.1 *Auf* $(-r, r)$ *sei die Differentialgleichung*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

gegeben, und die Funktionen p, q und f seien auf $(-r, r)$ in die Potenzreihen (5.2) entwickelbar. Sind dann $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ gegeben und bestimmen wir a_n für $n \geq 2$ durch (5.4), so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ genügt.

Anmerkungen

1. Sind p, q und f Polynome, so kann r beliebig groß gewählt werden, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.

2. Ist man an einem Lösungsfundamentalsystem interessiert, so bestimmt man beispielsweise Lösungen y_1, y_2 mit

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

3. Der Satz zeigt insbesondere, dass die Lösung einer linearen Differentialgleichung (2. Ordnung) mit reell-analytischen Daten wieder reell-analytisch ist.

5.2 Einige spezielle Differentialgleichungen

Wir diskutieren nun einige spezielle Differentialgleichungen, die aus physikalischen und technischen Anwendungen kommen.

5.2.1 Die Hermitesche Differentialgleichung

Hierunter versteht man die Gleichung

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \tag{5.5}$$

wobei λ ein reeller Parameter ist. Satz 5.1 ist offenbar anwendbar, und wir können die Lösung für beliebige Anfangswerte $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe darstellen. Die Rekursionsvorschrift (5.4) liefert in diesem Fall

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(0 - (-2)na_n - \lambda a_n) = a_n \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ erhalten wir also die Lösung

$$y_1^{(\lambda)}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots,$$

und für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ finden wir

$$y_2^{(\lambda)}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots .$$

Diese beiden Funktionen bilden ein Fundamentalsystem für die Hermitesche Differentialgleichung. Ist speziell $\lambda = 2n$, so folgt aus der Rekursionsformel $a_{n+2} = 0$. Ist n gerade, so ist daher $y_1^{(2n)}$ ein Polynom, und ist n ungerade, so ist $y_2^{(2n)}$ ein Polynom. Speziell ist

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(x) &= 1, \\ y_2^{(2)}(x) &= x, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2, \\ y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3, \\ y_1^{(8)}(x) &= 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass der Koeffizient vor x^n gleich 2^n wird, so erhalten wir die *Hermite-Polynome*, die man schreiben kann als

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

(Überzeugen Sie sich davon, dass dies tatsächlich Polynome sind, die die Hermitesche Differentialgleichung lösen.)

5.2.2 Die Legendresche Differentialgleichung

Das ist die Gleichung

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}y = 0, \tag{5.6}$$

die wir auf $(-1, 1)$ betrachten, und in der λ wieder ein reeller Parameter ist. Für diese Gleichung ist

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \\ q(x) &= \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \end{aligned}$$

und $f(x) = 0$. Diese Reihen konvergieren auf $(-1, 1)$, und Satz 5.1 ist anwendbar. Die Bestimmung der Koeffizienten der Reihendarstellung der Lösung ist aber recht kompliziert. Einfacher wird es, den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in die zu (5.6) äquivalente Gleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

einzusetzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

und einen Koeffizientenvergleich durchzuführen:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda(\lambda+1)a_n = 0,$$

also

$$a_{n+2} = a_n \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} = a_n \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Mit den Vorgaben $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ bzw. $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1^{(\lambda)}(x) = 1 \quad &- \quad \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}x^4 \\ &- \quad \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)}{6!}x^6 + \ldots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} y_2^{(\lambda)}(x) = x \quad &- \quad \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}x^5 \\ &- \quad \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)}{7!}x^7 + \ldots, \end{aligned}$$

die ein Lösungsfundamentalsystem von (5.6) bilden.
Ist $\lambda := n \in \mathbb{N}$, so reduziert sich abwechselnd eine der beiden Lösungen auf ein Polynom vom Grad n:

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(x) &= 1, \\ y_2^{(1)}(x) &= x, \\ y_1^{(2)}(x) &= 1 - 3x^2, \\ y_2^{(3)}(x) &= x - \frac{5}{3}x^3, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass sie an der Stelle $x = 1$ den Wert 1 annehmen, so gelangt man zu den *Legendre-Polynomen*, die man in der folgenden Form schreiben kann

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n.$$

(Man kann wieder zeigen, dass dies Polynome vom Grad n sind, die die Legendresche Differentialgleichung lösen.)

5.2.3 Die Besselsche Differentialgleichung

Das ist die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0, \tag{5.7}$$

die man auf $(0, \infty)$ betrachtet und wo λ wieder ein reeller Parameter ist. Wir können diese Gleichung auch in der Form

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - \lambda^2}{x^2} y = 0$$

schreiben. Offenbar ist Satz 5.1 nicht anwendbar, da sich die Koeffizienten nicht um 0 in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Für gewisse Werte von λ lassen sich zwar Lösungen durch einen modifizierten Potenzreihenansatz

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

gewinnen; eine befriedigende Lösungstheorie erfordert jedoch Methoden der komplexen Funktionentheorie. Wir diskutieren daher nur den modifizierten Potenzreihenansatz (5.8). Mehr zu diesem Thema finden Sie z. B. in Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Abschnitt 27.
Dazu erinnern wir an die Gammafunktion

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

die der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ genügt. Für $n \geq 1$ ergibt sich hieraus

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \ldots (x+1)\, x\, \Gamma(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Diese Identität erlaubt es, die Gammafunktion auf $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ fortzusetzen durch

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1) \ldots (x+1)\, x} \quad \text{für } x \in (-n, \infty) \setminus (-\mathbb{N}).$$

Man rechnet leicht nach, dass man so eine wohldefinierte Funktion $\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ erhält, die der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$$

genügt.

Lemma 5.2 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis Wir setzen zur Abkürzung $a_n := \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)}$ und betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$. Mit der Funktionalgleichung für die Gammafunktion erhalten wir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!\Gamma(n+1+\lambda)}{(n+1)!\Gamma(n+2+\lambda)} = \frac{1}{(n+1)(n+1+\lambda)} \to 0$$

für $n \to \infty$. Aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$. ∎

Aus diesem Lemma ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$ und für alle $x \in (0,\infty)$ die Konvergenz der Reihe

$$J_\lambda(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}.$$

Die so erhaltenen Funktionen $J_\lambda : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißen *Besselfunktionen erster Art.*

Lemma 5.3 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$. Dann ist J_λ auf $(0,\infty)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung* (5.7).

Beweis Zur Abkürzung setzen wir

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+\lambda)2^{2n+\lambda}}$$

und erhalten

$$J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+\lambda}.$$

Da wir konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren dürfen, folgt

$$\begin{aligned} J'_\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2n+\lambda)x^{2n-1+\lambda}, \\ J''_\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2n+\lambda)(2n-1+\lambda)x^{2n-2+\lambda}. \end{aligned}$$

Setzen wir $a_{-1} := 0$, so finden wir weiter

$$\begin{aligned} & x^2 J''_\lambda(x) + xJ'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)J_\lambda(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((2n+\lambda)(2n-1+\lambda)a_n + (2n+\lambda)a_n + a_{n-1} - \lambda^2 a_n\big)\, x^{2n+\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((4n^2+4n\lambda)a_n + a_{n-1}\big)\, x^{2n+\lambda}. \qquad (5.9) \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (4n^2+4n\lambda)a_n &= 4n(n+\lambda)\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+\lambda)2^{2n+\lambda}} \\ &= -\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(n+\lambda)2^{2(n-1)+\lambda}} = -a_{n-1}. \end{aligned}$$

Also verschwinden alle Koeffizienten der Potenzreihe (5.9), d.h. löst J_λ die Besselsche Differentialgleichung. ■

Satz 5.4 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann bilden J_λ und $J_{-\lambda}$ ein Lösungsfundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung.*

Beweis Wegen Lemma 5.3 ist nur noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen J_λ und $J_{-\lambda}$ zu zeigen. Diese folgt aus

$$\lim_{x\to 0+} J_\lambda(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} J_{-\lambda}(x) = \infty \quad \text{für } \lambda > 0,$$

was man leicht mit der Definition von J_λ bestätigt. ■

In einigen Fällen lassen sich die Besselfunktionen durch bekannte Funktionen darstellen.

Satz 5.5 *Für alle $x > 0$ ist*

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \textit{und} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad (5.10)$$

Beweis Wir zeigen nur die erste Beziehung aus (5.10) und erinnern an den speziellen Wert $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (vgl. Vorlesung MIT, Abschnitt 3.4). Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{3}{2}) &= \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \dots \\ &= \frac{2n+1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!2^n 2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{n!2^{2n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}J_{1/2}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!2^{2n}}{n!(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.\end{aligned}$$

■

Anmerkung Für $\lambda = n \in \mathbb{N}$ ist J_{-n} nicht definiert. Trotzdem kann man J_n durch eine sogenannte *Besselsche Funktion zweiter Art* (oder auch *Neumannsche Funktion*) N_n zu einem Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung ergänzen. Diese Funktionen N_n sind definiert durch

$$N_n(x) := \lim_{\lambda\to n}\frac{J_\lambda(x)\cos(\pi\lambda) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\pi\lambda)}.$$