3 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir die allgemeine Theorie linearer Differentialgleichungen. Sie werden zahlreiche Parallelen zur Theorie linearer Gleichungssysteme feststellen, die bereits weiter oben angeklungen sind.

3.1 Allgemeine lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 3.1 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung ($L(\mathbb{R}^n)$ ist mit einer Operatornorm versehen). Diese Bedingung ist äquivalent zur Stetigkeit aller Einträge a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ der Matrix A. Dann heißt*

$$y' = A(x)y \tag{3.1}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung *bzw. ein* homogenes lineares Differentialgleichungssystem. *Ist $b : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, so heißt*

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{3.2}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung *und* (3.1) *heißt die* zu (3.2) gehörende homogene Differentialgleichung*.*

Analog definiert man komplex-lineare Differentialgleichungen mit stetigen Funktionen $A : I \to L(\mathbb{C}^n)$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$. Wegen $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ lassen sich diese auf den reellen Fall zurückführen. Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 3.2 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung*

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \text{mit } \varphi(x_0) = y_0. \tag{3.3}$$

Bei linearen Gleichungen kann man also Lösungen auf dem gesamten Intervall I finden (globale Lösungen), was man für allgemeinere Gleichungen der Gestalt $y' = f(x, y)$ nicht erwarten kann.

Beweis Man kann sich ähnlich wie im Beweis von Satz 1.10 klarmachen, dass es genügt, die Aussage auf jedem kompakten Intervall $J \subseteq I$, das x_0 enthält, zu zeigen. Auf J erfüllt die Funktion

$$f : J \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (x, y) \mapsto A(x)y + b(x)$$

eine Lipschitzbedingung. Für $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbb{K}^n$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_2 &= \|(A(x)y_1 + b(x)) - (A(x)y_2 + b(x))\|_2 \\ &= \|A(x)(y_1 - y_2)\|_2 \leq \|A(x)\| \cdot \|y_1 - y_2\|_2, \end{aligned}$$

und die stetige Funktion $x \mapsto \|A(x)\|$ nimmt auf der kompakten Menge J ihr Maximum L an. Wie im Beweis von Satz 1.6 findet man für den Operator

$$B : C(J) \to C(J), \quad (By)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)y(t) + b(t))\, dt$$

die Abschätzung

$$\|B^n u - B^n v\|_\infty \leq \frac{L^n |J|^n}{n!} \|u - v\|_\infty,$$

wobei $|J|$ für die Länge des Intervalles J steht. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L|J|)^n}{n!}$ konvergiert, folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 1.6 mit dem Fixpunktsatz von Banach-Weissinger. ■

Man beachte auch, dass man die Lösung von (3.3) wieder durch Picard-Iteration gewinnen kann.

3.2 Die homogene lineare Differentialgleichung

Wir gehen nun genauer auf die Struktur der Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ ein.

Satz 3.3 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$ stetig. Weiter bezeichne L_h die Menge aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$. Dann ist L_h ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und die folgenden Aussagen für Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in L_h$ sind äquivalent:*

(a) *Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sind linear unabhängig.*

(b) *Es gibt ein $x_0 \in I$ so, dass die Vektoren $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$ sind.*

(c) *Für jedes $x \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x) \in \mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K}$ linear unabhängig.*

Beweis Wir zeigen zunächst, dass L_h ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Abbildungen $I \to \mathbb{K}^n$ ist. Offenbar ist die Nullfunktion eine Lösung der homogenen Gleichung. Weiter: sind $y, z \in L_h$, so ist $y' = Ay$ und $z' = Az$ und folglich

$$(y - z)' = y' - z' = Ay - Az = A(y - z),$$

d.h. $y - z \in L_h$. Schließlich ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $y \in L_h$ auch $(\lambda y)' = \lambda y' = \lambda Ay = A(\lambda y)$, d.h. $\lambda y \in L_h$.

Nun zeigen wir die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c). Die Implikation $(c) \Rightarrow (b)$ ist offensichtlich. Sind weiter die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ linear abhängig, so sind auch die Vektoren $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0)$ linear abhängig. Das beweist die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ und es verbleibt zu zeigen, dass $(a) \Rightarrow (c)$. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in L_h$ linear unabhängig. Wäre (c) nicht erfüllt, so gäbe es ein $x_0 \in I$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, die nicht alle Null sind mit

$$c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_m\varphi_m(x_0) = 0.$$

Wir setzen $\varphi := c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m$. Dann ist φ eine Lösung der homogenen Gleichung $A(x)y = y'$ mit $\varphi(x_0) = 0$. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 3.2 ist φ die Nullfunktion. Dies widerspricht der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Schließlich zeigen wir noch, dass $\dim L_h = n$. Die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ zeigt, dass $\dim L_h \leq \dim \mathbb{K}^n = n$. Für den Beweis der umgekehrten Ungleichung seien $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$. Nach Satz 3.2 gibt es Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_h$ mit $\varphi_j(x_0) = e_j$. Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ zeigt die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Also ist $\dim L_h \geq n$. ∎

Definition 3.4 *Unter einem* Lösungsfundamentalsystem *(oder auch* Integralbasis*) der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des Vektorraumes L_h ihrer Lösungen.*

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen von $y' = A(x)y$. Schreibt man

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

so ist $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine $n \times n$-Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

deren Spalten die Lösungen φ_i sind. Die Zahl $(\det\Phi)(x)$ heißt *Wronski-Determinante von* $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ *in* x. Nach Satz 3.3 sind die Lösungen $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ genau dann linear unabhängig, wenn $(\det\Phi)(x_0)\neq 0$ für ein $x_0\in I$. Die Implikation $(b)\Rightarrow(c)$ in Satz 3.3 zeigt, dass dann automatisch $(\det\Phi)(x)\neq 0$ für alle $x\in I$ ist.

Ist $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der Gleichung $y'=A(x)y$, so läßt sich jede Lösung $\varphi\in L_h$ schreiben als

$$\varphi = c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n \quad \text{mit} \quad c_i\in\mathbb{K}.$$

In Matrixschreibweise bedeutet das

$$\varphi=\Phi c \qquad \text{mit} \quad c=\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n.$$

Wählt man die φ_i so, dass $\varphi_i(x_0)=e_i$, so ist weiter

$$\varphi(x_0)=\Phi(x_0)c=c,$$

d.h. die Anwendung dieses Φ auf die rechte Seite der Anfangsbedingung liefert eine Lösung $\varphi:=\Phi c$ von $y'=A(x)y$ mit $\varphi(x_0)=c$.

Schließlich ist $\Phi'=(\varphi_1',\ldots,\varphi_n')=(A\varphi_1,\ldots,A\varphi_n)=A\Phi$, d.h. Φ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$Y'=A(x)Y \qquad \text{in} \quad G=I\times L(\mathbb{K}^n)$$

im Raum der $n\times n$-Matrizen.

Beispiel A Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -\omega y_2\\ y_2' &= \omega y_1\end{aligned}$$

mit $I=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und $n=2$. Wir schreiben dieses System als

$$y'=A(x)y \quad \text{mit} \quad A(x)=\begin{pmatrix} 0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\varphi_1(x)=\begin{pmatrix}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x)=\begin{pmatrix}-\sin\omega x\\ \cos\omega x\end{pmatrix}$$

Lösungen sind. Diese Lösungen sind linear unabhängig, denn für

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\cos\omega x & -\sin\omega x\\ \sin\omega x & \cos\omega x\end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \det\Phi(0)=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1\neq 0$$

(und tatsächlich ist auch $\det\Phi(x)=(\cos\omega x)^2+(\sin\omega x)^2=1\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$). ■

3.3 Die inhomogene lineare Differentialgleichung

Wir beginnen wieder mit einer Beschreibung der Struktur der Lösungsmenge.

Satz 3.5 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$, $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Funktionen. Wir bezeichnen die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$ bzw. der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit L_h bzw. L_i. Dann gilt für jedes $\psi_0 \in L_i$ die Beziehung $L_i = \psi_0 + L_h$.*

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man also durch Addition einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Beweis Sei ψ_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Für jedes $\varphi \in L_h$ ist dann

$$(\psi_0 + \varphi)' = \psi_0' + \varphi' = A\psi_0 + b + A\varphi = A(\psi_0 + \varphi) + b,$$

d.h. $\psi_0 + \varphi \in L_i$, woraus $\psi_0 + L_h \subseteq L_i$ folgt. Ist umgekehrt $\psi \in L_i$, so ist

$$(\psi - \psi_0)' = \psi' - \psi_0' = (A\psi + b) - (A\psi_0 + b) = A(\psi - \psi_0),$$

d.h. $\psi - \psi_0 \in L_h$ und $L_i \subseteq \psi_0 + L_h$. ■

Der folgende Satz liefert genau wie im Eindimensionalen (Satz 2.3) ein Verfahren zur Konstruktion der Lösungen von inhomogenen Gleichungen.

Satz 3.6 (Variation der Konstanten) *Es gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.5: Ist $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$, so erhält man eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ durch den Ansatz $\psi(x) = \Phi(x)c(x)$. Dabei ist $c : I \to \mathbb{K}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $c'(x) = \Phi(x)^{-1}b(x)$, d.h.*

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt.$$

Beweis Ist $c' = \Phi^{-1}b$, so folgt mit der Produktregel

$$\psi' = \Phi' c + \Phi c' = \Phi' c + \Phi\Phi^{-1} b = A\Phi c + b = A\psi + b,$$

also $\psi \in L_i$. ■

Beispiel B Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = -y_2, \qquad y_2' = y_1 + x,$$

d.h. $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel A ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen Systems $y' = A(x)y$. Mit

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix}$$

und Satz 3.6 folgt also

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix} dt.$$

Mit partieller Integration findet man

$$\begin{aligned} \int_0^x t\sin t\,dt &= -t\cos t\Big|_0^x + \int_0^x \cos t\,dt = -x\cos x + \sin x, \\ \int_0^x t\cos t\,dt &= t\sin t\Big|_0^x - \int_0^x \sin t\,dt = x\sin x + \cos x - 1, \end{aligned}$$

also

$$c(x) = c(0) + \begin{pmatrix} -x\cos x + \sin x \\ x\sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung für $c(0) = \binom{0}{1}$ ist daher

$$\psi_0(x) = \Phi(x)c(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x\cos x + \sin x \\ x\sin x + \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \\ &= \Phi(x) \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x\cos x + \sin x \\ x\sin x + \cos x \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. ■

3.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Wir übertragen nun die bewiesenen Resultate über lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Definition 3.7 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.4}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Ist $b : I \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, so heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.5}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, *und* (3.4) *heißt die* zugehörige homogene Gleichung.

Satz 3.8 *Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.7 gilt:*

(a) *Die Menge L_h aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ der homogenen Differentialgleichung* (3.4) *bildet einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

(b) *Bezeichnet L_i die Menge aller Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}$ der inhomogenen Gleichung* (3.5), *so gilt $L_i = \psi_0 + L_h$ für jedes $\psi_0 \in L_i$.*

(c) *Die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der homogenen Gleichung* (3.4) *sind genau dann linear unabhängig über $\mathbb{K}$, wenn für ein und damit für alle $x \in I$ die Wronski-Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Beweis Die Differentialgleichung (3.5) ist (vgl Abschnitt 1.2) äquivalent zum inhomogenen linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \ldots - a_{n-1}(x)y_{n-1} + b(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei der Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}$ von (3.5) die Lösung

$$f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \mapsto \mathbb{K}^n$$

von (3.6) entspricht. Entsprechendes gilt für die homogenen Gleichungen. Damit folgt die Behauptung aus den Sätzen 3.3 und 3.5. ∎

Definition 3.9 *Eine Basis des Lösungsraumes L_h heißt* Lösungsfundamentalsystem.

Beispiel C Die Gleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \qquad \text{auf } (0,\infty) \tag{3.7}$$

hat $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ als Lösungen (Nachrechnen!). Die zugehörige Wronski-Determinante ist

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Folglich ist φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1x + c_2\sqrt{x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ∎

Verfahren der Ordnungsreduktion Wie findet man Lösungen von Differentialgleichungen wie (3.7)? Das im Folgenden beschriebene *Verfahren der Ordnungsreduktion nach d'Alambert* ist anwendbar, wenn *eine* Lösung der Gleichung bekannt ist (die man wie z.B. die Lösung $\varphi(x) = x$ von (3.7) durch Erraten finden kann).

Sei etwa φ eine bekannte Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3.8}$$

Wir suchen eine weitere Lösung ψ in der Form $\psi = \varphi u$ mit einer zu bestimmenden Funktion u. Dann ist

$$\psi' = \varphi' u + \varphi u' \quad \text{und} \quad \psi'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u''$$

und folglich

$$\begin{aligned}\psi'' + a\psi' + b\psi &= \varphi''u + 2\varphi'u' + \varphi u'' + a(\varphi'u + \varphi u') + b\varphi u \\ &= (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)u + \varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' \\ &= \varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u'.\end{aligned}$$

Wir sehen: Ist $\varphi(x) \neq 0$ auf einem Intervall I, so löst ψ genau dann die Gleichung (3.8), wenn u die Gleichung

$$u'' + (2\frac{\varphi'}{\varphi} + a)u' = 0 \tag{3.9}$$

löst. Nach der Substitution $u' = v$ geht (3.9) aber in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung über, die wir in Abschnitt 2.2 gelöst haben. Fassen wir zusammen.

Satz 3.10 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Weiter sei $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (3.8) *mit $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ist u eine Lösung der Gleichung* (3.9)*, so ist auch $\psi(x) := \varphi(x)u(x)$ eine Lösung von* (3.8)*. Die Lösungen φ und ψ sind linear unabhängig, wenn die Funktion u nicht konstant ist.*

Ganz analog führt der Produktansatz $\psi := \varphi u$ auch zu einer Reduktion der Ordnung bei der allgemeineren Gleichung (3.4).

Beispiel D Wir kennen (z.B. durch Erraten) die Lösung $\varphi(x) = x$ der Gleichung (3.7) auf $(0, \infty)$. Der Ansatz $\psi(x) = xu(x)$ liefert eine zu φ linear unabhängige Lösung von (3.7), wenn wir eine nichtkonstante Lösung von

$$u'' + (2\frac{\varphi'}{\varphi} + a)u' = u'' + (\frac{2}{x} - \frac{1}{2x})u' = 0$$

finden. Sei $u' = v$. Die Gleichung

$$v' + (\frac{2}{x} - \frac{1}{2x})v = v' + \frac{3}{2x}v = 0$$

hat nach Satz 2.2 die allgemeine Lösung

$$v(x) = c \exp\left(\int_1^x \left(-\frac{3}{2t}\right) dt\right) = c \exp\left(-\frac{3}{2}\ln x\right) = cx^{-3/2}.$$

Für $c = -\frac{1}{2}$ ist $u(x) = x^{-1/2}$ eine Stammfunktion von $v(x)$, und daher ist $\psi(x) = xu(x) = \sqrt{x}$ eine weitere, zu $\varphi(x) = x$ linear unabhängige Lösung. ■