2 Elementare Lösungsmethoden

Lösungen von Differentialgleichungen lassen sich nicht immer explizit bestimmen. In diesem Kapitel betrachten wir einige spezielle Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungen auf elementarem Weg bestimmt werden können.

2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ sowie $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ sein soll. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x)\, g(y) \qquad \text{in} \quad G = I \times J \tag{2.1}$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.*

Satz 2.1 *Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir definieren Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \textit{und} \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt.$$

Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ der Gleichung (2.1) *mit $\varphi(x_0) = y_0$. Diese Lösung genügt der Gleichung*

$$H(\varphi(x)) = F(x) \qquad \textit{für alle } x \in I'. \tag{2.2}$$

Beweis Wir zeigen zunächst: Ist $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.1) mit $\varphi(x_0) = y_0$, so gilt (2.2). Wegen $\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x))$ ist nämlich

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = F(x),$$

und die Substitution $u = \varphi(t)$ im linken Integral liefert

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{du}{g(u)} = H(\varphi(x)).$$

Wir zeigen weiter: Wenn eine Lösung von (2.2) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt. Wegen $H'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ ist H nämlich streng monoton auf J und besitzt daher eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $U : H(J) \to J$. Aus (2.2) folgt nun

$$\varphi(x) = U(F(x)) \qquad \text{für alle } x \in I'.$$

Wenn also eine Lösung von (2.1) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt.

Schließlich zeigen wir noch die Existenz einer Lösung. Wir definieren

$$\varphi(x) := U(F(x)) \qquad \text{für } x \in I'.$$

Dann ist φ stetig differenzierbar, da F, H und U stetig differenzierbar sind, und aus $H(\varphi(x)) = F(x)$ folgt

$$f(x) = F'(x) = H'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}\ .$$

Also ist $\varphi'(x) = f(x)\,g(\varphi(x))$, und wegen $H(y_0) = 0$ ist auch

$$\varphi(x_0) = U(F(x_0)) = U(0) = y_0. \qquad \blacksquare$$

Beispiel A Für die Differentialgleichung

$$y' = y^2 \qquad \text{auf} \quad G := \mathbb{R}^2$$

ist eine maximale Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) gesucht. Ist $c = 0$, so ist die eindeutige (und maximale) Lösung durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$ gegeben.

Sei nun $c > 0$. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit $\varphi(0) = c$, so ist $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in I$. Andernfalls gäbe es nämlich nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in I$ mit $\varphi(x_0) = 0$. Nach dem Eindeutigkeitssatz wäre φ dann die konstante Nullfunktion, da diese die Gleichung $y' = y^2$ löst und φ in x_0 mit ihr übereinstimmt. Dies ist nicht mit $\varphi(0) = c > 0$ vereinbar. Also ist tatsächlich $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in I$, und wir dürfen uns auf das kleinere Gebiet $G_1 := \mathbb{R} \times (0, \infty) \subseteq G$ beschränken. Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.1 ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto y^2.$$

Wir erhalten

$$F(x) = \int_0^x 1\,dt = x \quad \text{und} \quad H(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\left.\frac{1}{t}\right|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}.$$

Dann gilt $H((0,\infty)) = \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$. Also ist $I' = \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$ das maximale Intervall mit $F(I') \subseteq H((0,\infty))$. Für die Lösung φ auf I' gilt nach (2.2)

$$H(\varphi(x)) = \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} \overset{!}{=} x = F(x),$$

d.h.

$$\varphi(x) = \frac{c}{1-cx} \qquad \text{auf} \quad \left(-\infty, \frac{1}{c}\right).$$

Analog ergeben sich für $c < 0$ die Lösungen

$$\varphi(x) = \frac{c}{1-cx} \qquad \text{auf} \quad \left(\frac{1}{c}, \infty\right).$$ ■

Beispiel B Für die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2 \qquad \text{auf} \quad G := \mathbb{R}^2$$

suchen wir eine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. In diesem Fall ist $F(x) = x - x_0$ und

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan y - \arctan y_0.$$

Aus

$$H(\varphi(x)) = \arctan \varphi(x) - \arctan y_0 \stackrel{!}{=} x - x_0 = F(x)$$

erhalten wir mit $c := \arctan y_0$ die Lösung

$$\varphi(x) = \tan(x - x_0 + c)$$

(vgl. das Beispiel vor Definition (1.9). ■

2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)\, y + b(x) \tag{2.3}$$

eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Das Wort *linear* lässt sich so verstehen: Erklärt man einen linearen Operator A auf dem linearen Raum der differenzierbaren Funktionen auf I durch $Ay := y' - ay$, so kann man (2.3) schreiben als $Ay = b$, und der Operator A ist *linear*, d.h. für differenzierbare Funktionen y_1 und y_2 und reelle Zahlen c_1, c_2 gilt

$$\begin{aligned} A(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)' - a(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1' - ay_1) + c_2(y_2' - ay_2) = c_1Ay_1 + c_2Ay_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.3) heißt *homogen*, wenn b die Nullfunktion ist, und sonst *inhomogen*. Wir beschäftigen uns zuerst mit der homogenen Gleichung

$$y' = a(x)y \tag{2.4}$$

(die man auch als Gleichung in getrennten Variablen betrachten könnte).

Satz 2.2 *Seien* $x_0 \in I$ *und* $c \in \mathbb{R}$*. Dann gibt es genau eine Lösung* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *der Differentialgleichung* (2.4) *mit* $\varphi(x_0) = c$*, und diese ist gegeben durch*

$$\varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right).$$

Beweis Man rechnet sofort nach, dass $\varphi(x_0) = c$ und

$$\varphi'(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \cdot a(x) = a(x)\,\varphi(x),$$

d.h. φ löst (2.4) mit der angegebenen Anfangsbedingung. Da für $f(x,y) := a(x)y$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = a(x)$ stetig ist, genügt f lokal einer Lipschitzbedingung (Satz 1.4) und somit sind die Lösungen eindeutig. ∎

Beispiel C Die Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = 2kxy$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$ haben die Gestalt

$$\varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} 2kt\,dt\right) = c\,\mathrm{e}^{k(x^2 - x_0^2)}.$$ ∎

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei φ eine Lösung der homogenen Gleichung (2.4) mit $\varphi(x_0) = 1$. Dann ist $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, und jede Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich als $\psi(x) = u(x)\,\varphi(x)$ schreiben. Dabei ist $u(x) = \psi(x)/\varphi(x)$ eine zu bestimmende, auf dem Intervall I stetig differenzierbare Funktion. Wir suchen nach Bedingungen, die u erfüllen muss, damit ψ die inhomogene Gleichung löst.

Zunächst gilt

$$\psi' = u'\varphi + u\varphi' = u'\varphi + ua\varphi = u'\varphi + a\psi.$$

Ein Vergleich mit der inhomogenen Gleichung $\psi' = a\psi + b$ zeigt, dass ψ genau dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn $u'\varphi = b$ gilt. Dann ist aber

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt + u(x_0).$$

Satz 2.3 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu allen $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung ψ der Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit $\psi(x_0) = c$, nämlich*

$$\psi(x) = \varphi(x)\left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \quad \textit{mit} \quad \varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right).$$

Für den Beweis ist lediglich zu bemerken, dass $u(x_0) = \psi(x_0)/\varphi(x_0) = \psi(x_0) = c$. ■

Anmerkung 1 Das oben angewandte Verfahren heißt *Variation der Konstanten.* Aus den Lösungen $x \mapsto c\varphi(x)$ der homogenen Gleichung gewinnt man Lösungen ψ der inhomogenen Gleichung durch den Ansatz $\psi(x) = c(x)\varphi(x)$, d.h. indem man die Konstante c zu einer Funktion macht. ■

Anmerkung 2 Jede Lösung ψ der inhomogenen Gleichung $y' = ay + b$ ist von der Gestalt $\psi = c\varphi + \mu$ mit

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \quad \text{und} \quad \mu(x) = \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Die Menge aller Funktionen $c\varphi$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist gerade die Lösungsmenge der homogenen Gleichung, und μ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. In diesem Sinn setzt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zusammmen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Diesen Sachverhalt kennen Sie aus der linearen Algebra. Er gilt für alle linearen Gleichungen. ■

Beispiel D Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3 \qquad \text{auf} \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

es ist also $a(x) = 2x$ und $b(x) = x^3$. Die homogene Gleichung hat die Lösungen

$$\varphi(x) = c\,\exp\left(\int_0^x 2t\,dt\right) = c\mathrm{e}^{x^2},$$

und die Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = c$ ist nach Satz (2.3) gleich

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{x^2}\left(c + \int_0^x t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right).$$

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitution $s(t) = t^2$ und mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-t^2}(2t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} s\mathrm{e}^{-s} ds = \frac{1}{2}\left(-s\ \mathrm{e}^{-s}\Big|_0^{x^2} + \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-s} ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-s}\Big|_0^{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

und finden schließlich

$$\psi(x) = \left(c + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right). \qquad \blacksquare$$

2.3 Die Differentialgleichung $y' = f(y/x)$

Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{auf} \quad G := \left\{\, (x,y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} : \frac{y}{x} \in I \,\right\} \tag{2.5}$$

(leider auch) eine *homogene Differentialgleichung*. Man verwechsele dies bitte nicht mit den homogenen linearen Differentialgleichungen. Neben (2.5) betrachten wir noch die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) \qquad \text{für } (x,z) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times I. \tag{2.6}$$

Wir werden im nächsten Satz sehen, dass man die Lösung von (2.5) auf die Lösung von (2.6) zurückführen kann. Letztere gehört aber zu den bereits behandelten Typen: sie ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

Satz 2.4 *Seien $J \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Intervall und $(x_0, y_0) \in G$ ein Punkt mit $x_0 \in J$. Eine Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung der Gleichung* (2.5) *mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$, wenn die Funktion*

$$\psi : J \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$$

eine Lösung von (2.6) *mit der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ ist.*

Beweis Sei zunächst φ eine Lösung von (2.5). Dann ist

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f(\psi(x)) - \psi(x)\right).\end{aligned}$$

Also ist ψ Lösung von (2.6) mit den entsprechenden Anfangsbedingungen. Ist umgekehrt ψ eine Lösung von (2.6), so ist

$$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) = \psi(x) + f(\psi(x)) - \psi(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right),$$

d.h. φ ist Lösung von (2.5). ∎

Man kann die Aussage von Satz (2.4) auch so formulieren: Die Gleichung (2.5) geht durch die Substitution $z = \frac{y}{x}$ in die Gleichung (2.6) über. Etwas salopp kann man rechnen: Aus $y = zx$ folgt $y' = z + xz'$, also geht $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ über in

$$z' = \frac{y' - z}{x} = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

Beispiel E Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \text{auf} \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Durch die Substitution $z := \frac{y}{x}$ geht sie über in die Gleichung

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)$$

mit getrennten Variablen. Für die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0 := \frac{y_0}{x_0}$ gilt daher

$$\arctan z - \arctan z_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

d.h. es ist

$$z(x) = \tan\left(c + \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right) \qquad \text{mit} \quad c = \arctan z_0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wird somit gelöst durch

$$y(x) = x\,\tan\left(c + \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right).$$ ∎

Variablensubstitutionen wie $z = y/x$ lassen sich oft bei der Lösung von Differentialgleichungen einsetzen.

2.4 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

In der Physik tritt die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ auf als eindimensionale Bewegungsgleichung eines Punktes, der einer nur vom Ort abhängigen Kraft ausgesetzt ist. Wir schreiben daher (t, x) statt (x, y) und $\dot{x}$ statt x' und betrachten für ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f(x) \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times I. \tag{2.7}$$

Wir definieren eine Funktion $U : I \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) := -\int_a^x f(t)\, dt,$$

wobei $a \in I$ beliebig gewählt ist. Die Funktion U hat die physikalische Bedeutung einer potentiellen Energie. Die Gleichung (2.7) geht dann über in

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x). \tag{2.8}$$

Die Gesamtenergie des Massenpunktes zum Zeitpunkt t wird gegeben durch

$$E(t) := \frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2 + U(x(t)). \tag{2.9}$$

Für die Ableitung dieser Funktion ergibt sich

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\,\dot{x}(t) = \dot{x}(t)\left(\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\right) = 0.$$

Also ist E eine konstante Funktion (Energieerhaltungssatz), und wir können E als reelle Zahl betrachten. Wegen (2.9) genügt die Bewegung dann der Differentialgleichung

$$(\dot{x}(t))^2 = 2(E - U(x(t))).$$

Ist $\dot{x}(t) \geq 0$, so folgt hieraus

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

und andernfalls

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

(man beachte, dass $U(x(t)) \leq E$). Diese beiden Gleichungen sind aber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. ■

Beispiel F Der *harmonische Oszillator* genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -kx \qquad \text{mit} \quad k > 0.$$

Wir suchen eine Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$, wobei $v_0 > 0$. Mit den obigen Bezeichnungen erhalten wir

$$U(x) = \int_0^x kt\,dt = \frac{k}{2}x^2,$$

und aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}(t_0))^2 + U(x(t_0)) = \frac{1}{2}v_0^2.$$

Da wir eine Lösung in einer Umgebung von t_0 suchen und $\dot{x}(t_0) > 0$ vorausgesetzt war, genügt x der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{k}{2}x^2\right)} = \sqrt{v_0^2 - kx^2},$$

und die Bewegung verläuft im Intervall $\{\, x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E \,\} = \left[-\frac{v_0}{\sqrt{k}}, \frac{v_0}{\sqrt{k}}\right]$. Zur Abkürzung setzen wir

$$A := \frac{v_0}{\sqrt{k}} \quad \text{und} \quad \omega := \sqrt{k}.$$

Die zu lösende Gleichung geht dann über in

$$\dot{x} = \sqrt{kA^2 - kx^2} = \omega A\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2},$$

und für $|x| < A$ finden wir mit Satz (2.1)

$$\int_0^x \frac{1}{A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{y}{A}\right)^2}}\,dy = \int_{t_0}^t ds$$

bzw.

$$\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{A} = t - t_0$$

und schließlich

$$x(t) = A\sin(\omega(t - t_0)).$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur in einer Umgebung von t_0. Durch Einsetzen stellt man jedoch fest, dass diese Funktion die Differentialgleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ löst. ∎