Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Steffen Roch

WS 06/07

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Grundlagen

Mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen haben die Mathematiker ein Werkzeug geschaffen, mit dem die zeitliche Entwicklung vieler Systeme in Natur und Gesellschaft beschrieben werden kann. Ein zeitabhängiges System, welches durch n reelle Parameter charakterisiert wird, wird zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ durch einen Vektor $y(t) \in \mathbb{R}^n$ modelliert. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird dann durch den Weg $y : I \to \mathbb{R}^n$ beschrieben. Es ist in der Regel schwierig, diese Wege explizit anzugeben. Die Modellierung des Systems liefert aber oft eine Gleichung der Gestalt

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

oder allgemein

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right).$$

Dies sind *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, und ihre Lösungen sind Funktionen. Das Wort ‚gewöhnlich' bezieht sich darauf, dass die betrachteten Funktionen nur von *einer* Veränderlichen abhängen. Gleichungen, deren Lösungen Funktionen mehrerer Veränderlicher sind und die partielle Ableitungen dieser Funktionen enthalten, heißen *partielle Differentialgleichungen*. Beispiele dafür sind die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$$

und die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2},$$

in denen die gesuchte Funktion y von der Zeit t und den räumlichen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ abhängt.

Als ergänzende Literatur zu diesem Skript kann dienen

- **Braun**: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen (sehr elementar; viele Beispiele)
- **Heuser**: Gewöhnliche Differentialgleichungen (sehr schönes Buch; zahlreiche Beispiele; viel zur Geschichte)
- **Forster**: Analysis II (knapp und präzise)

- **Aulbach**: Gewöhnliche Differentialgleichungen (breit angelegte Einführung)
- **Arnold**: Gewöhliche Differentialgleichungen (nicht einfach)
- **Walter**: Gewöhnliche Differentialgleichungen
- **Kamke**: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen (ein Klassiker; über 1500 konkrete Lösungen)

Daneben habe ich mich am Skript von Herrn Professor Neeb orientiert.

Wir werden zunächst einige Beispiele kennenlernen und legen dann den allgemeinen Rahmen fest, in dem wir gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten werden. Anschließend wenden wir uns der Theorie zu und beschäftigen uns mit der Existenz und der Eindeutigkeit von Lösungen.

1.1 Beispiele

Die Traktrix (Schleppkurve) Dieses Problem geht auf Leibniz (1693) zurück. Im $\mathbb{R}^2$ zieht man an einem Punkt p an einer straff gespannten Schnur ZP der Länge a. Der Zugpunkt Z soll auf der positiven y-Achse fortrücken, und zu Beginn befinde sich P in $(a, 0)$ und Z in $(0, 0)$. Offenbar wird sich P auf die y-Achse zu bewegen. Wir beschreiben die Lage von $P = P(x, y)$ durch Angabe einer Funktion $y : (0, a] \to \mathbb{R}$ so, dass $P = P(x, y(x))$. Die Geometrie der Problemstellung führt auf die folgende Bedingung für die Ableitung von y:

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung sind also die Stammfunktionen von

$$x \mapsto -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{auf } (0, a).$$

Mit der Substitution $x = a\sin t,\ t \in (0, \frac{\pi}{2}),$ finden wir

$$\begin{aligned}
\int -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx &= -\int \frac{a\cos t}{a\sin t}(a\cos t)\,dt = -a\int \frac{1}{\sin t}\,dt + a\int \sin t\,dt \\
&= -a\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| - a\cos t + C \\
&= -a\ln\frac{1-\cos t}{\sin t} - a\cos t + C \\
&= -a\ln\frac{a-a\cos t}{a\sin t} - a\cos t + C \\
&= -a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a\sin t} - \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} + C \\
&= -a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2} + C \\
&= a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen erfüllt nur eine die Anfangsbedingung $y(a) = 0$, nämlich die mit $C = 0$. Die Lösung unseres Problems ist also die Funktion

$$y : (0, a] \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2}. \qquad \blacksquare$$

Exponentielles Wachstum Eine Bakterienpopulation befindet sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit t die Größe $P(t)$. Nach Ablauf der Zeit $\triangle t$ hat sie sich um $\triangle P = P(t+\triangle t) - P(t)$ vermehrt. Eine vernünftige Annahme ist, dass $\triangle P$ für kleine Zeitspannen proportional zum Ausgangszustand $P(t)$ und zur Zeitspanne $\triangle t$ ist:

$$\triangle P = aP(t)\triangle t \quad \text{mit } a > 0\,.$$

Wir lassen nun außer acht, dass P nur ganzzahlige Werte annimmt (Bakterien sind sehr klein und treten in sehr großer Anzahl auf) und nehmen sogar an, dass P differenzierbar ist. Der Grenzübergang $\triangle t \to 0$ in $\frac{\triangle P}{\triangle t} = aP(t)$ liefert dann die Differentialgleichung $P'(t) = aP(t)$, die (wie wir hoffen) das Wachstum der Bakterienpopulation beschreibt. Die positiven Lösungen der Gleichung $P' = aP$ kann man wie folgt finden. Wir schreiben $P' = aP$ als $\frac{P'}{P} = a$ bzw. $(\ln P)' = a$ bzw. $Q' = a$ mit $Q(t) := \ln P(t)$. Die Stammfunktionen von $Q'(t) = a$ können wir sofort angeben: $Q(t) = at + b$ mit $b \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt

$$P(t) = e^{Q(t)} = e^{at+b} = Ce^{at}$$

mit einer positiven Konstanten $C = e^b$. Kennt man den Wert $P_0 = P(t_0)$, so kann man C bestimmen. Aus $P_0 = Ce^{at_0}$ ergibt sich $C = P_0 e^{-at_0}$ und damit

$$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}\,.$$

Dieses Wachstumsmodell heißt *exponentielles Wachstum*. ■

Logistisches Wachstum Das exponentielle Wachstum ist nur begrenzt realistisch. Wird eine Population sehr groß, so treten in der Regel wachstumshemmende Faktoren (begrenzte Ressourcen) auf. Kann etwa die Population eine Maximalgröße K nicht überschreiten, so ist es vernünftig anzunehmen, dass die Zuwachsrate $\frac{\triangle P}{\triangle t}$ proportional zur Anzahl $P(t)$ und auch zum „verbleibenden Spielraum“ $K - P(t)$ ist, was auf die Differentialgleichung

$$P'(t) = bP(t)(K - P(t)) = aP(t) - bP(t)^2$$

mit $a = bK$ führt. Die Differentialgleichung $P' = aP - bP^2$ wurde 1838 von Verhulst eingeführt und beschreibt das *logistische Wachstum*.

Sei $0 < P < K$. Zur Lösung der logistischen Differentialgleichung $P' = bP(K - P)$ betrachten wir die Funktion $Q := \frac{K-P}{P} = \frac{K}{P} - 1$. Für diese ist $Q' = -\frac{KP'}{P^2}$, so dass P genau dann eine Lösung von $P' = bP(K - P)$ ist, wenn

$$Q' = -\frac{K}{P^2}P' = -\frac{K}{P^2}bP(K-P) = -bK\frac{K-P}{P} = -bKQ.$$

Die Funktion Q genügt also der Differentialgleichung für exponentielles Wachstum. Mit $Q_0 := Q(0)$ erhalten wir die eindeutige Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{-bKt}.$$

Ist $P_0 = P(0) \neq 0$, so ist $Q_0 = \frac{K}{P_0} - 1$, und wir erhalten mit $P = \frac{K}{Q+1}$

$$P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad P(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-bKt}}.$$

Hieraus lassen sich Informationen über das logistische Wachstum ableiten. Zum Beispiel ist für $bK > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-bKt}} = K.$$

Die Größe der Population strebt also unabhängig von ihrer Anfangsgröße $P_0 > 0$ gegen K. ■

1.2 Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition 1.1 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. *Unter einer* Lösung *von* (1.1) *verstehen wir eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit*

$$(x, \varphi(x)) \in G \quad \textit{und} \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \textit{für alle } x \in I.$$

Ist f stetig und φ eine Lösung von (1.1), so ist φ offenbar stetig differenzierbar.

Oft betrachtet man auch die Komponenten $y_1, \ldots, y_n$ von y getrennt. Aus $y' = f(x, y)$ wird dann das *System von Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Es ist allerdings meist einfacher, sich y als Punkt und die Gleichung in der Form (1.1) zu denken.

Man betrachtet auch sogenannte *implizite Differentialgleichungen* der Gestalt

$$F(x, y, y') = 0,$$

wobei F eine Funktion auf einer Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. Solche Gleichungen sind im allgemeinen wesentlich schwieriger zu behandeln als die *expliziten Differentialgleichungen* der Gestalt $y' = f(x, y)$ (die man natürlich mit $F(x, y, y') := y' - f(x, y)$ auch in impliziter Form schreiben kann). Wir befassen uns hier ausschließlich mit expliziten Gleichungen (auf die man mit dem Satz über implizite Funktionen im wesentlichen alles zurückführen kann).

Die in Abschnitt 1.1 betrachteten Gleichungen ordnen sich in diesen Rahmen wie folgt ein. Für die Gleichung der Traktrix ist

$$G = (0, a] \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x, y) = -\tfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{mit} \quad a > 0,$$

für die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums ist

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = ay \quad \text{mit} \quad a > 0,$$

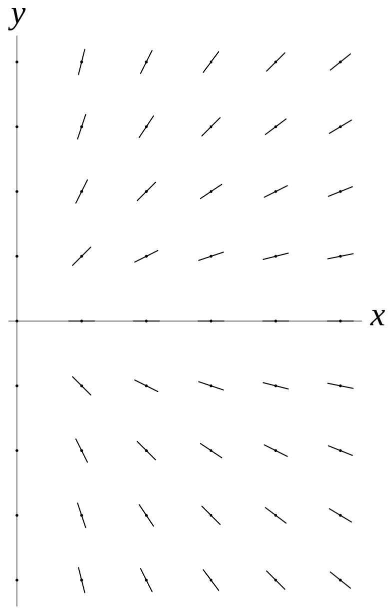
und für die logistische Differentialgleichung haben wir

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x,y) = by(K-y) \quad \text{mit} \quad b, K > 0.$$

Richtungsfelder Für $n = 1$ und $f : G \to \mathbb{R}$ kann man die Funktion f geometrisch als *Richtungsfeld* interpretieren, indem man jedem Punkt $(x,y) \in G$ die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $(1, f(x,y))$ der Lösungskurve durch diesen Punkt zuordnet. Für

$$G = (0,\infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x,y) = \tfrac{y}{x}$$

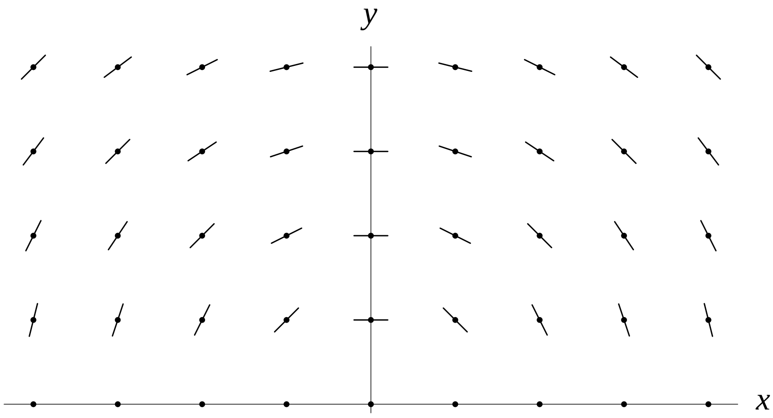
erhält man beispielsweise das folgende Richtungsfeld:



Das Bild suggeriert, dass Geraden durch den Nullpunkt, also Funktionen der Gestalt $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung lösen. Das ist tatsächlich der Fall:

$$\varphi'(x) = a = \tfrac{\varphi(x)}{x} = f\,(x, \varphi(x)) \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Für $G = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ und $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ sieht das Richtungsfeld wie folgt aus:



Tatsächlich sind Lösungen der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ durch „Halbkreiskurven“

$$\varphi : (-c, c) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{c - x^2} \quad (\text{mit } \ c > 0)$$

gegeben, denn es gilt

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{c - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{c - x^2}} = \frac{-x}{\varphi(x)} = f(x, \varphi(x)). \qquad \blacksquare$$

Definition 1.2 *Seien $n, N \geq 1$, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN}$ und $f : G \to \mathbb{R}^N$. Dann heißt*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Eine* Lösung *von* (1.2) *ist eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ auf einem Intervall I mit*

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G$$

und

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \quad \textit{für alle } x \in I.$$

Zurückführung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung Man kann eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Sei eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \ \text{ mit } \ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nN} \supseteq G \to \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

gegeben. Wir betrachten das System der Differentialgleichungen

$$\left.\begin{array}{c} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Wir können (1.4) zu $y' = F(x, y)$ mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ zusammenfassen, wenn wir

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^n)^N \simeq \mathbb{R}^{nN}$$

setzen. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (1.3), so ist

$$\Phi : I \to \mathbb{R}^{nN}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (1.4), da ja

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \\ \varphi^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \\ f(x, \Phi(x)) \end{pmatrix} = F(x, \Phi(x)).$$

Ist umgekehrt $\Phi : I \to \mathbb{R}^{nN}$ eine Lösung von (1.4), so ist $\varphi := \Phi_1 : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (1.3), denn es ist ja $\varphi' = \Phi_2$ und daher $\varphi'' = \Phi_2' = \Phi_3$ u.s.w., so dass φ n-mal differenzierbar ist mit

$$\varphi^{(n)}(x) = \Phi_n'(x) = f(x, \Phi(x)) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Also löst φ tatsächlich (1.2).

Beispiel Wir betrachten die eindimensionale Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \text{ mit } \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Die zugehörige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x, y, y') = -\omega^2 y.$$

Wir können diese Differentialgleichung auf das System erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\omega^2 y_1 \end{aligned}$$

bzw.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y \qquad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

zurückführen. ■

Da man Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung in dem Sinn zurückführen kann, dass man die entsprechenden Lösungen leicht ineinander umrechnen kann, dürfen wir uns für die allgemeine Theorie auf die Betrachtung von Systemen erster Ordnung beschränken.

Zurückführung auf eine Integralgleichung Ist die Funktion f stetig und unabhängig von y, so reduziert sich (1.1) auf $y' = f(x)$, und die Lösungen haben nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Gestalt

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Auch im allgemeinen Fall (mit stetigem f) folgt aus $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, dass

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Nun tritt aber φ auf beiden Seiten der Gleichung auf, so dass diese *Integralgleichung* nicht unmittelbar zur Berechnung von φ genutzt werden kann. Genügt andererseits die stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \varphi(t)\right)\, dt, \tag{1.5}$$

so ist der Integrand auf der rechten Seite stetig. Also ist φ stetig differenzierbar. Durch Ableiten beider Seiten von (1.5) erhalten wir $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Somit sind die stetigen Lösungen von (1.5) genau die differenzierbaren Lösungen von (1.1). Die Übersetzung einer Differentialgleichung in eine Integralgleichung wird sich zum Beispiel beim Beweis von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen als nützlich erweisen. ■

1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Definition 1.3 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig.*

(a) *Die Funktion f genügt* auf G einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten L, *wenn*

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\|_2 \leq L\,\|y - \tilde{y}\|_2 \quad \text{für alle } \ (x,y),(x,\tilde{y}) \in G\,.$$

(b) *Die Funktion f genügt auf G einer* lokalen Lipschitzbedingung, *wenn jeder Punkt von G eine Umgebung $U \subseteq G$ besitzt, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitzbedingung genügt.*

Die Funktion f genügt also einer Lipschitzbedingung, wenn die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ für jedes x Lipschitzstetig ist und eine Lipschitzkonstante unabhängig von x gewählt werden kann.

Satz 1.4 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und $f : G \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ sei eine stetige Funktion, die bzgl. y stetig partiell differenzierbar ist, d.h. die Funktion*

$$d_2 f : G \to L(\mathbb{R}^n),\ (x,y) \mapsto (d_2 f)(x,y)$$

sei stetig, wobei $(d_2 f)(x,y)$ für jedes x die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x,y)$ in y bezeichnet. Dann genügt f in G lokal einer Lipschitzbedingung.

Die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $(d_2 f)(x,y)$ ist gegeben durch

$$\left(\tfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Also ist $d_2 f$ genau dann stetig, wenn alle Einträge dieser Matrix stetige Funktionen von G nach $\mathbb{R}$ sind.

Beweis von Satz 1.4 Sei $(a,b) \in G$. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass

$$V := \overline{U_r(a,b)} = \{(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(u,v) - (a,b)\|_2 \leq r\} \subseteq G.$$

Die Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt, und die Funktion $d_2 f : G \to L(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Wir versehen $L(\mathbb{R}^n)$ mit der durch die euklidische Norm induzierten Matrixnorm

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Da stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, folgt die Existenz von

$$L := \max\{\|(d_2 f)(x,y)\| : (x,y) \in V\}\,.$$

Mit $(x, y),\ (x, \tilde{y}) \in V$ liegen auch alle Punkte $(x, y + t(\tilde{y} - y))$ für $t \in [0, 1]$ in V. Mit Satz 10.19 aus Analysis II folgt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_2 \leq L\, \|y - \tilde{y}\|_2 \,. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass die Konstante L vom Punkt (a, b) abhängt. Ist

$$\max\{\|(d_2 f)(x, y)\| : (x, y) \in G\} < \infty$$

und ist G z. B. konvex, so kann L unabhängig von (a, b) gewählt werden, und f erfüllt eine globale Lipschitzbedingung.

Eine erste wichtige Konsequenz der Lipschitzbedingung für die Lösung von Differentialgleichungen ist die Eindeutigkeit der Lösung.

Satz 1.5 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die auf G einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Sind $\varphi,\ \psi : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, die in einem Punkt a des Intervalls I übereinstimmen, so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.*

Beweis Wir zeigen zuerst: ist $\varphi(a) = \psi(a)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \varepsilon$.
Dazu integrieren wir beide Gleichungen $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ und erhalten wegen $\varphi(a) = \psi(a)$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x \left(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\right) dt.$$

Da f einer lokalen Lipschitzbedingung genügt, gibt es ein $\delta_0 > 0$ und ein L so, dass

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|_2 \leq L\, \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \qquad \text{für alle } \ t \in [a - \delta_0, a + \delta_0].$$

Seien $0 < \delta \leq \delta_0$ und $x \in [a - \delta, a + \delta]$. Mit der Dreiecksungleichung für Integrale erhalten wir

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|_2 \leq L \left| \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \, dt \right| .$$

Mit

$$M(\delta) := \max\left\{\|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \, : \, t \in [a - \delta, a + \delta]\right\}$$

können wir weiter abschätzen:

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|_2 \leq L\, |x - a|\, M(\delta) \leq L\delta M(\delta).$$

Bilden wir noch auf der linken Seite das Maximum über $x \in [a-\delta, a+\delta]$, so folgt schließlich $M(\delta) \leq L\delta M(\delta)$. Wir wählen nun $\varepsilon := \delta \in (0, \delta_0]$ so klein, dass $L\delta < 1$. (Beachte: L hängt nur von δ_0, nicht von δ ab.) Dann folgt $M(\varepsilon) = 0$, d.h. φ und ψ stimmen auf $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ überein.

Nun zeigen wir, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ (für $x \leq a$ erfolgt der Beweis analog). Für $x = a$ ist nichts zu zeigen. Sei $x > a$ und

$$x_1 := \sup\left\{t \in [a, x] \,:\, \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]}\right\}.$$

Nach dem ersten Beweisschritt ist $x_1 > a$, und es ist $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$. Ist nämlich (t_n) eine Folge in $[a, x_1)$, die gegen x_1 konvergiert, so folgt

$$\varphi(x_1) = \lim \varphi(t_n) = \lim \psi(t_n) = \psi(x_1).$$

Falls nun $x = x_1$, so folgt $\varphi(x) = \psi(x)$, d.h. die Behauptung. Ist dagegen $a < x_1 < x$, so wenden wir die Überlegung aus dem ersten Beweisschritt auf den Punkt x_1 an Stelle von a an und finden ein $\varepsilon > 0$ so, dass φ und ψ auf $[x_1, x_1+\varepsilon]$ übereinstimmen. Das widerspricht der Definition von x_1. ■

Beispiel Wir betrachten ein Beispiel für eine Differentialgleichung, deren Lösungen nicht eindeutig sind. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto (\sqrt[3]{y})^2.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ist $\varphi(x) \equiv 0$. Weiter ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_a(x) = \frac{1}{27}(x-a)^3$ eine Lösung, denn

$$\varphi_a'(x) = \frac{1}{9}(x-a)^2 = \left(\frac{1}{3}(x-a)\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\varphi_a(x)}\right)^2.$$

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind nun φ und φ_a verschiedene Lösungen, die im Punkt a übereinstimmen: $\varphi(a) = \varphi_a(a) = 0$. Man kann aus den Lösungen φ_a sogar weitere Lösungen „zusammensetzen“. So sind für $a < b$ auch die Funktionen

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für} \quad x \leq a \\ 0 & \text{für} \quad a < x \leq b \\ \varphi_b(x) & \text{für} \quad b < x \end{cases}$$

stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Aus Satz 1.5 folgt, dass f nicht überall einer lokalen Lipschitzbedingung genügen kann. In der Tat ist die Funktion

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \frac{|f(0,y) - f(0,0)|}{|y-0|} = \left|\frac{y^{2/3}}{y}\right| = |y^{-1/3}|$$

auf jeder Umgebung von 0 unbeschränkt. ■

Satz 1.6 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) *Seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, r und R positive reelle Zahlen und*

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| \leq r,\ \|y - y_0\|_2 \leq R\}\,.$$

Weiter sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und es seien M, $L \geq 0$ so, dass

$$\|f(x,y)\|_2 \leq M \text{ und } \|f(x,y) - f(x,y')\|_2 \leq L\,\|y - y'\|_2$$

für alle Punkte (x,y), $(x,y') \in G$. Schließlich seien $\varepsilon := \min\left(r, \frac{R}{M}\right)$ und I das Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Dann gilt:

(a) *Auf I existiert eine eindeutige Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.*

(b) *Diese Lösung lässt sich wie folgt berechnen: Die durch*

$$\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_0(x) := y_0$$

und

$$\varphi_{k+1} : I \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \varphi_k(t)\right)\, dt$$

rekursiv definierte Funktionenfolge konvergiert auf I gleichmäßig gegen die Lösung φ.

(c) *Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} e^{L\varepsilon}\, \|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty\,.$$

Hierbei ist $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| \,:\, t \in I\}$. Die angegebene Fehlerabschätzung lässt sich noch verbessern (vgl. Heuser). Als Startfunktion haben wir die einfachste Funktion gewählt, die die Anfangsbedingung erfüllt. Andere Startfunktionen sind möglich, solange sie die Voraussetzungen von Satz 1.7 (unten) erfüllen.

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$ gerade die stetigen Lösungen der Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)\, dt \tag{1.6}$$

sind. Wir definieren einen Operator $A: C(I,\mathbb{R}^n) \to C(I,\mathbb{R}^n)$ durch

$$(Ay)(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(t, y(t))\; dt \tag{1.7}$$

und können dann die Integralgleichung (1.6) als *Fixpunktgleichung* $Ay = y$ betrachten. Das legt es nahe, zum Beweis von Satz 1.6 den Banachschen Fixpunktsatz heranzuziehen. Das geht, liefert aber etwas schlechtere Ergebnisse als im Satz angegeben (ε muss verkleinert werden). Besser geeignet ist die folgende Modifikation des Banachschen Fixpunktsatzes.

Satz 1.7 (Fixpunktsatz von Banach-Weissinger) *Seien $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $U \subseteq X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge. Weiter seien $a_n \geq 0$ Zahlen, für die die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, und $A : U \to U$ sei eine Abbildung mit*

$$\|A^n u - A^n v\| \leq a_n \|u - v\| \quad \textit{für alle } \; u, v \in U \; \textit{und alle } n \geq 1.$$

Dann besitzt A genau einen Fixpunkt $u \in U$ (d.h. einen Punkt u mit $Au = u$). Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge $(A^n u_0)_{n\geq 1}$ bei beliebig gewähltem Startvektor $u_0 \in U$, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_n\| \leq \left(\sum_{r=n}^{\infty} a_r\right) \|u_1 - u_0\| \quad \textit{mit } \; u_n := A^n u_0.$$

Ist A eine Kontraktion, d.h. gibt es ein $\lambda < 1$ mit $\|Au - Av\| \leq \lambda \|u - v\|$ für alle $u, v \in U$, so ist

$$\left\|A^2 u - A^2 v\right\| \leq \lambda \|Au - Av\| \leq \lambda^2 \|u - v\|,$$

d.h. man kann $a_1 = \lambda$, $a_2 = \lambda^2$ und allgemein $a_n = \lambda^n$ wählen. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ konvergiert, ist der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 12.1 aus Analysis II) ein Spezialfall von Satz 1.7.

Beweis von Satz 1.7 Sei $u_0 \in U$ und $u_n := A^n u_0$. Dann ist

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|A^n u_1 - A^n u_0\| \leq a_n \|u_1 - u_0\| \tag{1.8}$$

und folglich für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|u_{n+k} - u_n\| &\leq \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\| + \|u_{n+k-1} - u_{n+k-2}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\leq (a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_n) \|u_1 - u_0\|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Das Cauchykriterium für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zeigt, dass $a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_n$ für jedes k kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wird, wenn nur n hinreichend groß ist. Das zeigt zusammen mit (1.9), dass $(u_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein Element u, und u gehört zu U, da alle u_n in U liegen und U abgeschlossen ist. Dieses Element u ist der gesuchte Fixpunkt. Wegen

$$\|u_{n+1} - Au\| = \|Au_n - Au\| \leq a_1 \|u_n - u\|$$

folgt nämlich $\lim u_n = Au$. Da aber auch $\lim u_n = u$ ist, muss $Au = u$ sein. Ist $v \in U$ ein weiterer Fixpunkt von A, so ist

$$\|u - v\| = \|Au - Av\| = \cdots = \|A^n u - A^n v\| \leq a_n \|u - v\| . \tag{1.10}$$

Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen ist $\lim a_n = 0$. Aus (1.10) folgt also $\|u - v\| = 0$ bzw. $u = v$. Schließlich folgt die angegebene Fehlerabschätzung, wenn wir in (1.9) $k \to \infty$ streben lassen. ■

Beweis von Satz 1.6 Wir wählen $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|.\|_\infty$,

$$U := \{y \in X : \|y - y_0\|_\infty \leq R\}$$

und A wie in (1.7). Dann ist X ein Banachraum (Satz 9.10 aus Analysis II) und $U \subseteq X$ ist abgeschlossen. Weiter bildet A die Menge U in U ab. Für $y \in U$ und $x \in I$ ist nämlich $(x, y(x)) \in G$ und daher

$$\|(Ay)(x) - y_0\|_2 = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right\|_2 \leq M\, |x - x_0| \leq \varepsilon M \leq R.$$

Wir überlegen uns noch die Existenz von Zahlen a_n mit den angegebenen Eigenschaften. Zunächst ist für $x \in I$ und $u, v \in U$

$$\begin{aligned} \|(Au)(x) - (Av)(x)\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, v(t))\, dt \right\|_2 \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|u(t) - v(t)\|_2\, dt \right| \leq L\, \|u - v\|_\infty\, |x - x_0| . \end{aligned}$$

Ähnlich findet man

$$\begin{aligned}\left\|(A^2u)(x)-(A^2v)(x)\right\|_2 &= \left\|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,(Au)(t)\right)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,(Av)(t)\right)\,dt\right\|_2 \\ &\le L\left|\int\limits_{x_0}^{x} \|(Au)(t)-(Av)(t)\|_2\,dt\right| \\ &\le L^2\,\|u-v\|_\infty\left|\int\limits_{x_0}^{x} |t-x_0|\,dt\right| \\ &= L^2\,\|u-v\|_\infty\,\frac{|x-x_0|^2}{2}.\end{aligned}$$

Wir fahren so fort und erhalten induktiv

$$\|(A^nu)(x)-(A^nv)(x)\|_2 \le L^n\,\|u-v\|_\infty\,\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

und schließlich wegen $|x-x_0|\le\varepsilon$

$$\|A^nu-A^nv\|_\infty \le \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}\,\|u-v\|_\infty\,.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon L)^n}{n!}$ konvergiert (ihre Summe ist $e^{\varepsilon L}-1$), können wir $a_n := \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}$ setzen, und alle Voraussetzungen aus dem Fixpunktsatz von Banach-Weissinger sind erfüllt. Dieser Satz liefert nun sofort die Aussagen (a) und (b) von Satz 1.6 sowie die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi-\varphi_n\|_\infty \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\varepsilon L)^k}{k!}\,\|\varphi_1-\varphi_0\|_\infty\,.$$

Schließlich bekommen wir wegen

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\varepsilon L)^k}{k!} = \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+k)!}(\varepsilon L)^k \le \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon L)^k}{k!} = \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}e^{\varepsilon L}$$

die in Aussage (c) angegebene Fehlerabschätzung. ■

Das durch $\varphi_0\equiv y_0$ und

$$\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t,\varphi_k(t)\right)\,dt$$

definierte Iterationsverfahren heißt *Picard-Iteration.* Satz 1.6 gibt hinreichende Bedingungen für die Konvergenz dieses Verfahrens an. Da diese Bedingungen in der Regel nicht notwendig sind, funktioniert es oft auch dann, wenn sie nicht erfüllt sind.

Beispiel Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 2xy$ in $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und suchen eine Lösung φ mit $\varphi(0) = c$. Der Iterationsoperator A ist

$$(Ay)(x) = c + \int_0^x 2ty(t)\,dt.$$

Wir starten mit der konstanten Funktion $\varphi_0(x) = c$ und finden

$$\varphi_1(x) = (A\varphi_0)(x) = c + \int_0^x 2tc\,dt = c(1 + x^2),$$

$$\varphi_2(x) = (A\varphi_1)(x) = c + \int_0^x 2tc(1 + t^2)\,dt = c(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4).$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k(x) = c(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}),$$

und damit ergibt sich

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = ce^{x^2}.$$

Tatsächlich gilt für diese Funktion $\varphi(0) = c$ und $\varphi'(x) = 2cxe^{x^2} = 2x\varphi(x)$. Die Funktion φ löst also die gegebene Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ (während Satz 1.6 zunächst nur die Lösbarkeit auf einem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ garantiert). ■

Satz 1.8 (Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ hat.*

Beweis Da G offen ist, findet man $r, R > 0$ so, dass die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| \leq r,\ \|y - y_0\|_2 \leq R\}$$

in G enthalten ist und dass f auf V einer Lipschitzbedingung genügt. Da weiter V kompakt und f stetig ist, gibt es ein $M > 0$ so, dass $\|f(x, y)\|_2 \leq M$ für alle $(x, y) \in V$. Wir setzen

$$\varepsilon := \min\left(r, \frac{R}{M}\right) \quad \text{und} \quad I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Dann gibt es nach Satz 1.6 auf I genau eine Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. ■

Beispiel Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(x, y) = 1 + y^2$. Die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ mit $y(x_0) = y_0 = \tan c$ und vorgegebenem $c \in (-\pi/2, \pi/2)$ hat die Gestalt

$$y(x) = \tan(x - x_0 + c)$$

(nachrechnen!). An diesem Beispiel wird deutlich, dass sich die Lösung mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nicht über das Intervall

$$(-\frac{\pi}{2} + x_0 - c, \frac{\pi}{2} + x_0 - c)$$

hinaus fortsetzen lässt. In diesem Sinn gibt es keinen globalen Existenzsatz, der auf ganz $\mathbb{R}$ die Existenz einer Lösung garantieren könnte. ■

Definition 1.9 *Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf der Menge G mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ heißt* maximal*, wenn I ein offenes Intervall ist und für alle anderen Lösungen*

$$\psi : J \to \mathbb{R}^n \quad \textit{mit} \ \ \psi(x_0) = y_0$$

auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ die Beziehung $J \subseteq I$ gilt.

Satz 1.10 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ genau eine maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.*

Beweis Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Sind für $j \in \{1,2\}$ I_j offene Intervalle, die x_0 enthalten, und sind die Funktionen $\varphi_j: I_j \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y' = f(x,y)$ mit $\varphi_j(x_0) = y_0$, so ist $I_1 \cap I_2$ ein offenes Intervall, das x_0 enthält. Nach Satz 1.5 stimmen die Funktionen $\varphi_1|_{I_1\cap I_2}$ und $\varphi_2|_{I_1\cap I_2}$ überein. Daher wird durch

$$\varphi: I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ falls } x \in I_1 \\ \varphi_2(x) \text{ falls } x \in I_2 \end{cases}$$

eine Funktion definiert, die auf $I_1 \cup I_2$ eine Lösung von $y' = f(x,y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

Nun zum eigentlichen Beweis: Sei I die Vereinigung aller offenen Intervalle J, die x_0 enthalten und für die es eine Lösung $\psi: J \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x,y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$ gibt. Die Menge I ist als Vereinigung offener Mengen wieder offen. Sind weiter $a, b \in I$, so finden wir offene Intervalle J_1, J_2 mit $x_0 \in J_1 \cap J_2$ und $a \in J_1$ sowie $b \in J_2$. Folglich ist $[a,b] \subseteq J_1 \cup J_2 \subseteq I$, und I ist ein offenes Intervall, das x_0 enthält.
Sei nun $x \in I$. Wir wählen ein offenes Intervall J, das x_0 und x enthält und auf dem eine Lösung $\psi: J \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x,y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$ existiert, und wir definieren $\varphi(x) := \psi(x)$. In der Vorüberlegung haben wir gesehen, dass der Wert $\varphi(x)$ nicht von der konkreten Wahl von J abhängt. Für φ haben wir $(x, \varphi(x)) = (x, \psi(x)) \in G$, und da φ in einer offenen Umgebung eines jeden Punktes $x_1 \in I$ mit einer Lösung $\psi_1: J_1 \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x,y)$ mit $\psi_1(x_0) = y_0$ übereinstimmt, ist auch φ eine Lösung. Die Maximalität dieser Lösung folgt sofort aus der Konstruktion. ∎

Für Gleichungen höherer Ordnung finden wir durch Reduktion auf ein System erster Ordnung sofort den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 1.11 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^n$ offen und $f: G \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Sind φ, $\psi: I \to \mathbb{R}^N$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1.11}$$

und gilt $\varphi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(a)$ für einen Punkt $a \in I$ und alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, so ist $\varphi = \psi$. Ist umgekehrt ein Punkt $(a, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in G$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi: [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^N$ der Differentialgleichung (1.11) mit

$$\varphi(a) = c_0,\ \varphi'(a) = c_1,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(a) = c_{n-1}.$$

Um die Lösung eindeutig festzulegen, genügt es also nicht, den Wert von φ an der Stelle a vorzuschreiben; vielmehr muss man auch die Werte aller Ableitungen von φ bis zur Ordnung $n-1$ in diesem Punkt vorgeben. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Bewegung eines Teilchens beschreiben, bedeutet dies, dass die Bewegung durch den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig festgelegt ist.

Beispiel Für die Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{auf } \ G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ \text{ mit } \ \omega \neq 0$$

ist für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

eine Lösung mit $\varphi(0) = a$ und $\varphi'(0) = \omega b$. Aus Satz 1.11 folgt, dass φ die einzige Lösung mit diesen Anfangsbedingungen ist. ■

Der folgende Satz zeigt, dass man bereits für *stetige* Funktionen f die lokale Lösbarkeit der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ garantieren kann. Die Eindeutigkeit der Lösung kann man unter dieser schwächeren Voraussetzung allerdings nicht mehr erwarten, wie wir aus dem Beispiel nach Satz 1.5 wissen.

Satz 1.12 (Lokaler Existenzsatz von Peano) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.*

Für den Beweis übersetzt man $y' = f(x, y)$ wieder in eine Integralgleichung, die man als Fixpunktproblem auffassen kann. Man benutzt nun den Schauderschen Fixpunktsatz anstelle des Banachschen Fixpunktsatzes und benötigt außerdem ein Kriterium für die relative Kompaktheit von Mengen in $C(I)$. Einen Beweis finden Sie z.B. in Aulbach, Satz 2.2.3.