

## 5 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  mit wenigstens zwei Randpunkten biholomorph auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  abbilden kann. Im Beweis werden wir die gesuchte biholomorphe Abbildung als Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen gewinnen. Wir betrachten daher zunächst Folgen holomorpher Funktionen.

### 5.1 Folgen holomorpher Funktionen und normale Familien

Wir beschreiben zunächst den für Folgen holomorpher Funktionen passenden Konvergenzbegriff.

**Definition 5.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine Folge  $(f_n)$  von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt kompakt konvergent, wenn für jede kompakte Teilmenge  $K$  von  $D$  die Folge der Einschränkungen  $(f_n|_K)$  gleichmäßig auf  $K$  konvergiert. Die Folge  $(f_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig auf  $D$ , wenn jeder Punkt  $z_0 \in D$  eine Umgebung  $U \subset D$  besitzt, auf der die Folge  $(f_n|_U)$  gleichmäßig konvergiert.

**Lemma 5.2** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen. Die Folge  $(f_n)$  konvergiert genau dann kompakt, wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert.

**Beweis** Sei  $(f_n)$  kompakt konvergent und  $z_0 \in D$ . Wir wählen einen Kreis  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ , der komplett in  $D$  liegt. Dann ist  $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r/2\}$  eine in  $D$  enthaltene kompakte Menge, auf der die Funktionen  $(f_n)$  gleichmäßig konvergieren. Dann konvergieren diese Funktionen erst recht gleichmäßig auf der Umgebung  $U = \{z : |z - z_0| < r/2\}$  von  $z_0$ .

Sei umgekehrt  $(f_n)$  lokal gleichmäßig konvergent und  $K$  kompakte Teilmenge von  $D$ . Für jedes  $z_0 \in K$  gibt es eine offene Umgebung  $U(z_0)$ , auf der die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig konvergiert. Die offenen Mengen  $U(z_0)$ ,  $z_0 \in K$ , überdecken  $K$ , und wegen der Kompaktheit von  $K$  findet man eine Überdeckung von  $K$  durch endlich viele der  $U(z_0)$ , etwa  $K \subseteq U(z_1) \cup \dots \cup U(z_n)$  mit  $z_i \in K$ . Es ist nun klar, dass die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig auf  $U(z_1) \cup \dots \cup U(z_n)$  und damit auf  $K$  konvergiert. ■

**Satz 5.3 (Weierstraß)** Sei  $G$  ein Gebiet, und eine Folge  $(f_n)$  holomorpher Funktionen konvergiere auf  $G$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$ . Dann ist  $f$  wieder holomorph, und alle Ableitungen von  $f_n$  konvergieren lokal gleichmäßig gegen die entsprechende Ableitung von  $f$ .

**Beweis** Die Funktion  $f$  ist als lokal gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig. Sei nun  $\Gamma$  der Rand eines Dreiecks, welches einschließlich seines

Randes ganz in  $G$  liegt. Da  $\Gamma$  kompakt ist, konvergieren die  $f_n$  auf  $\Gamma$  gleichmäßig gegen  $f$ , und wir dürfen Integration und Grenzübergang vertauschen:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist  $f$  holomorph in  $G$ . Wir zeigen nun noch die lokal gleichmäßige Konvergenz von  $f_n^{(k)}$  gegen  $f^{(k)}$  für alle  $k \geq 1$ . Dazu sei  $z_0 \in G$ ,  $B_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  sei ein Kreis um  $z_0$ , der einschließlich seines Randes komplett in  $G$  liegt, und es sei  $B_{r/2} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r/2\}$ . Für alle  $z \in B_{r/2}$  ist dann nach dem Entwicklungssatz (bzw. der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel)

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1} \\ &= C \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \end{aligned}$$

mit einer von  $z \in B_{r/2}$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Es gilt also

$$\sup_{z \in B_{r/2}} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq C \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \rightarrow 0,$$

woraus die lokal gleichmäßige Konvergenz folgt. ■

**Folgerung 5.4 (Weierstraß)** *Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet, und die Funktionen  $f_n$  seien auf  $\overline{G} = G \cup \partial G$  stetig und in  $G$  holomorph. Wenn die Folge  $(f_n)$  auf  $\partial G$  gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert sie auf ganz  $\overline{G}$  gleichmäßig, und die Grenzfunktion ist in  $G$  holomorph.*

**Beweis** Nach dem Maximumprinzip gilt für alle  $m$  und  $n$  sowie für alle  $z \in \overline{G}$

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)|.$$

Hieraus, aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f_n)$  auf  $\partial G$  sowie aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz von  $(f_n)$  auf  $\overline{G}$ . Nach Satz 5.3 ist die Grenzfunktion auf  $G$  holomorph. ■

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für Reihen von Funktionen.

**Beispiel** (Wird im weiteren nicht benötigt.) Wir überlegen uns, dass die Reihe

$$z \mapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} \quad \text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \text{ kompakt konvergiert.}$$

Sei  $K$  kompakt in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Wählen wir  $R \in \mathbb{R}$  so, dass  $K$  im Kreis  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  enthalten ist. Dann gilt für alle  $z \in K$  und alle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > 2R$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|j| \geq N} \frac{1}{(z-j)^2} \right| &= \left| \sum_{j \geq N} \frac{1}{(z-j)^2} + \sum_{j \geq N} \frac{1}{(z+j)^2} \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-ugl.}}{\leq} 2 \sum_{j \geq N} \frac{1}{(j-|z|)^2} \leq 2 \sum_{j \geq N} \frac{1}{(j-j/2)^2} = 8 \sum_{j \geq N} \frac{1}{j^2}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass für  $j \geq N > 2R$  gilt:  $|z| \leq R < N/2 \leq j/2$ . Die Reihe  $2 \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$  ist also eine konvergente Majorante für die Reihe  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (z-j)^{-2}$ , woraus die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe auf  $K$  und damit die kompakte Konvergenz folgt. Die Summe dieser Reihe ist übrigens

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Man nennt daher  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$  auch die *Partialbruchentwicklung* der Funktion  $z \mapsto \pi^2 / \sin^2 \pi z$ . Ähnliche Entwicklungen findet man für alle in  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktionen. ■

Weiter stellt sich die Frage, ob der Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge biholomorpher Abbildungen (der nach Satz 5.3 holomorph ist) wieder biholomorph ist. Zur Antwort benötigen wir den Satz von Rouché in der folgenden einfachen Form.

**Satz 5.5 (Satz von Rouché)** Sei  $G$  ein Gebiet,  $B$  eine Kreisscheibe, die mit ihrem Rand  $\partial B$  komplett in  $G$  liegt, und  $f$  und  $g$  seien in  $G$  holomorph. Gilt

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in \partial B,$$

so haben  $f$  und  $g$  in  $B$  gleich viele Nullstellen (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten).

**Satz 5.6** Sei  $G$  ein Gebiet und  $(f_n)$  eine auf  $G$  kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion  $f$ . Hat  $f$  in  $z_0 \in G$  eine  $k$ -fache  $w_0$ -Stelle, so gibt es beliebig kleine Umgebungen  $U \subseteq G$  von  $z_0$ , so dass jede Funktion  $f_n$  mit hinreichend großem  $n$  auf  $U$  genau  $k$   $w_0$ -Stellen (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit) besitzt.

**Beweis** O.E.d.A. sei  $w_0 = 0$ . Wir wählen  $r > 0$  so, dass  $\overline{B_r(z_0)} \subset G$  (mit  $B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$ ) und dass  $f$  auf  $\overline{B_r(z_0)}$  nur in  $z_0$  verschwindet (da  $f$  nicht konstant ist, sind Nullstellen von  $f$  isolierte Punkte ↗ Identitätssatz).

Dann ist  $d := \min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} > 0$ . Weiter wählen wir nun  $N$  so, dass für alle  $n \geq N$  und alle  $z \in \partial B_r(z_0)$  gilt:  $|f_n(z) - f(z)| < d$  (möglich wegen gleichmäßiger Konvergenz auf  $\partial B_r(z_0)$ ). Für alle  $n \geq N$  ist also

$$|f(z) - f_n(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B_r(z_0).$$

Der Satz von Rouché liefert nun die Behauptung. ■

**Folgerung 5.7** *Sei  $G$  Gebiet und  $(f_n)$  eine auf  $G$  kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion  $f$ . Sind alle  $f_n$  injektiv, so ist auch  $f$  injektiv.*

**Beweis** Angenommen,  $f$  ist nicht injektiv. Dann gibt es ein  $w_0 \in \mathbb{C}$  und Punkte  $z_1 \neq z_2 \in G$  so, dass  $f(z_1) = f(z_2) = w_0$ . Nach Satz 5.6 gibt es dann disjunkte Umgebungen  $U_1$  von  $z_1$  und  $U_2$  von  $z_2$  so, dass jede Funktion  $f_n$  mit hinreichend großem  $n$  in  $U_1$  und in  $U_2$  jeweils mindestens eine  $w_0$  Stelle besitzt. Dann sind diese Funktionen  $f_n$  nicht injektiv im Widerspruch zu den Voraussetzungen. ■

Desweiteren benötigen wir noch Sätze, die man als Kompaktheitskriterien für Funktionenmengen deuten kann. Bekanntlich besitzt jede beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  eine konvergente Teilfolge („Beschränkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind relativ kompakt“). Wir benötigen ähnliche Kriterien, die die Existenz konvergenter Teilfolgen in Mengen von Funktionen garantieren. Für Mengen stetiger Funktionen und die übliche gleichmäßige Konvergenz leistet dies der Satz von Arzelá/Ascoli, den wir als bekannt voraussetzen und hier nur zitieren. Vorher eine Definition.

**Definition 5.8** *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $\mathcal{F}$  eine Menge von Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  heißt gleichgradig stetig, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so gibt, dass  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  $x, y \in M$  mit  $|x - y| < \delta$  und für alle  $f \in \mathcal{F}$ .*

**Satz 5.9 (Satz von Arzelá/Ascoli)** *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  kompakt und  $(f_n)$  eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen  $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gibt es eine auf  $M$  gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $(f_n)$ .*

Hieraus ergibt sich leicht eine lokale Variante. Dazu nennen wir eine Familie  $\mathcal{F}$  von auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  definierten Funktionen *lokal beschränkt* bzw. *lokal gleichgradig stetig*, wenn jeder Punkt von  $U$  eine Umgebung  $V \subset U$  besitzt, auf der die Familie der Einschränkungen  $(f|_V)$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , beschränkt bzw. gleichgradig stetig ist. Aus Arzelá/Ascoli ergibt sich sofort

**Satz 5.10 („Lokaler“ Satz von Arzelá/Ascoli)** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $(f_n)$  eine lokal beschränkte und lokal gleichgradig stetige Folge von Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gibt es eine auf  $U$  lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $(f_n)$ .*

Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  ( $= \mathbb{R}^2$ ) und sind die Funktionen  $f_n$  holomorph, vereinfacht sich die Situation wesentlich:

**Satz 5.11** *Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Jede auf  $U$  lokal beschränkte Familie  $\mathcal{F}$  holomorpher Funktionen ist lokal gleichgradig stetig.*

**Beweis** Sei  $a \in U$  und  $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$  eine Kreisscheibe, deren Abschließung ganz in  $U$  liegt. Dann gibt es eine Konstante  $K$  so, dass  $|f(z)| \leq K$  für alle  $z \in \overline{B_r(a)}$  und alle  $f \in \mathcal{F}$ . Wir zeigen die gleichgradige Stetigkeit von  $\mathcal{F}$  auf  $\overline{B_{r/2}(a)}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für alle  $z_1, z_2 \in \overline{B_{r/2}(a)}$  und  $f \in \mathcal{F}$  ist dann

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{z \in \overline{B_{r/2}(a)}} |f'(z)|.$$

Weiter gilt für  $z \in \overline{B_{r/2}(a)}$  nach dem verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{K}{(r/2)^2} = \frac{4K}{r}.$$

Für  $z_1, z_2 \in \overline{B_{r/2}(a)}$  mit  $|z_1 - z_2| < \delta := \frac{r\varepsilon}{4K}$  hat man also  $|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$ . Da  $\delta$  nicht von  $f$  sondern nur von  $\mathcal{F}$  abhängt, ist der Satz bewiesen. ■

Als unmittelbare Folgerung von Satz 5.11 und dem lokalen Satz von Arzelá/Ascoli findet man:

**Satz 5.12 (Satz von Montel)** *Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen. Dann besitzt jede auf  $D$  lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Traditionell heißt eine Menge  $\mathcal{F}$  holomorpher Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine *normale Familie*, wenn jede Folge aus  $\mathcal{F}$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Wir können den Satz von Montel also auch wie folgt formulieren:

*Jede lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.*

Abschließend noch eine Aussage über die Konvergenz von Folgen aus normalen Familien. Wir werden sehen, dass in jeder normalen Familie jede punktweise konvergente Folge lokal gleichmäßig konvergiert. Es gilt sogar noch allgemeiner:

**Satz 5.13 (Satz von Vitali)** *Sei  $G$  ein Gebiet und  $\mathcal{F}$  eine normale Familie von auf  $G$  holomorphen Funktionen. Weiter sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge paarweise verschiedener Punkte aus  $G$ , die gegen ein  $z_0 \in G$  konvergiert, und  $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$  sei eine Folge von Funktionen, die auf  $M := \{z_n : n \geq 0\}$  punktweise konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $G$  lokal gleichmäßig.*

**Beweis** Wir definieren eine Funktion  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(z_k) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_k)$ . Außerdem wissen wir, dass es eine Teilfolge von  $f_n$  gibt, die lokal gleichmäßig gegen eine auf  $G$  holomorphe Funktion  $f$  konvergiert. Auf  $M$  gilt offenbar  $f|_M = g$ . Wir zeigen nun, dass die komplette Folge  $(f_n)$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein  $\varepsilon_0 > 0$ , eine kompakte Menge  $K$  in  $G$ , eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  von  $(f_n)$  sowie Punkte  $x_k \in K$  ( $k \geq 1$ ) so, dass

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \text{ für alle } k. \quad (5.1)$$

Da  $(f_{n_k}) \subseteq \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}$  normal, gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_{k_r}})_{r \geq 1}$  von  $(f_{n_k})$ , die auf  $G$  lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion  $\tilde{f}$  konvergiert. Wegen (5.1) kann diese nicht mit  $f$  übereinstimmen. Andererseits ist natürlich  $\tilde{f}|_M = g$ , d.h. auf  $M$  stimmen  $f$  und  $\tilde{f}$  überein. Nach dem Identitätssatz stimmen  $f$  und  $\tilde{f}$  auf ganz  $G$  überein. Widerspruch. ■

## 5.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Der Riemannsche Abbildungssatz macht eine Aussage über einfach zusammenhängende Gebiete. Zur Erinnerung: Wir bezeichnen mit  $\mathbb{C}^\infty$  die um den Punkt  $\infty$  erweiterte komplexe Ebene, die wir über die stereographische Projektion mit der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren.

**Definition 5.14** Ein Gebiet (d.h. eine offene und zusammenhängende Menge)  $G \subseteq \mathbb{C}^\infty$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sein Komplement  $\mathbb{C}^\infty \setminus G$  zusammenhängend ist.

Die gleiche Definition trifft man auch für offene und zusammenhängende Gebiete  $G \subseteq \mathbb{C}^\infty$ . Wir werden in diesem Abschnitt die einfach zusammenhängenden Gebiete in  $\mathbb{C}^\infty$  bis auf biholomorphe Äquivalenz klassifizieren. Sehen wir uns zunächst zwei einfache Beispiele an.

**Beispiel 1**  $\mathbb{C}^\infty$  ist einfach zusammenhängend.  $\mathbb{C}^\infty$  ist jedoch zu keinem echten Teilgebiet  $G$  biholomorph äquivalent. Bei jeder konformen Abbildung  $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow G$  muß nämlich die Menge  $G = f(\mathbb{C}^\infty)$  offen (Offenheitssatz) und kompakt (da  $\mathbb{C}^\infty$  kompakt) sein. Dies ist nur für  $G = \mathbb{C}^\infty$  möglich. ■

**Beispiel 2** Sei  $p \in \mathbb{C}^\infty$ . Dann ist die punktierte Sphäre  $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$  einfach zusammenhängend. Falls  $p = \infty$ , ist  $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$  gleich  $\mathbb{C}$ . Anderenfalls ist  $z \mapsto \frac{1}{z-p}$  eine konforme Abbildung von  $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$  auf  $\mathbb{C}$  (wobei  $\infty \mapsto 0$ ,  $p \mapsto \infty$ ).  $\mathbb{C}$  selbst ist jedoch zu keinem beschränkten Gebiet biholomorph äquivalent (Satz von Liouville). ■

Erstaunlicherweise sind aber alle einfach zusammenhängenden Gebiete im  $\mathbb{C}^\infty$ , deren Komplement mindestens 2 verschiedene Punkte enthält, zum Einheitskreis

$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  biholomorph äquivalent! Dies ist der Riemannsche Abbildungssatz. Es gibt also genau 3 Klassen einfach zusammenhängender Gebiete im  $\mathbb{C}^\infty$  bezüglich biholomorpher Äquivalenz. Diese werden repräsentiert durch  $\mathbb{C}^\infty$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$ .

**Satz 5.15 (Riemannscher Abbildungssatz)** Sei  $G \subset \mathbb{C}^\infty$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Komplement  $\mathbb{C}^\infty \setminus G$  mindestens zwei Punkte enthält. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung  $f$  von  $G$  auf  $\mathbb{D}$ . Man kann außerdem vorschreiben, dass für einen beliebig gewählten Punkt  $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$  gilt:  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$ . Durch diese Vorgaben wird  $f$  eindeutig bestimmt.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet. Wir beginnen mit der

*Eindeutigkeit* Seien  $f$  und  $g$  biholomorphe Abbildungen von  $G$  auf  $\mathbb{D}$  mit  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  und  $f'(z_0), g'(z_0) > 0$ . Dann ist  $h := f \circ g^{-1}$  eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf sich mit  $h(0) = 0$ . Wie wir aus der Übung wissen, ist  $h$  dann eine Drehung, d.h.  $h(z) = e^{i\varphi}z$  mit einem  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Hieraus folgt  $h'(0) = e^{i\varphi}$ .

Andererseits ist

$$\begin{aligned} h'(0) &= (f \circ g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) \\ &= f'(z_0) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = f'(z_0) / g'(z_0) > 0, \end{aligned}$$

so dass notwendigerweise  $e^{i\varphi} = 1$ , d.h.  $h(z) = z$  bzw.  $f = g$ . ■

Den *Existenzbeweis* führen wir in drei Schritten:

- (a) Wir konstruieren eine biholomorphe Abbildung  $f_1$  von  $G$  auf ein Gebiet  $G^* \subseteq \mathbb{D}$  so, dass  $f_1(z_0) = 0$ ,  $f_1'(z_0) > 0$ .
- (b) Unter allen injektiven holomorphen Abbildungen  $g$  von  $G^*$  in  $\mathbb{D}$  mit  $g(0) = 0$  suchen wir einen Kandidaten  $f_0$  für eine Abbildung auf  $\mathbb{D}$ . Die Idee ist,  $g'(0)$  maximal zu wählen, da  $g'(0)$  den „Vergrößerungsfaktor“ von  $g$  in der Nähe der 0 beschreibt.
- (c) Wir zeigen, dass die in (b) bestimmte Abbildung tatsächlich der Bedingung  $f_0(G^*) = \mathbb{D}$  genügt. Damit ist  $f = f_0 \circ f_1$  eine Funktion, deren Existenz der Riemannsche Abbildungssatz behauptet.

*Zu (a).* Sei  $G \subset \mathbb{C}^\infty$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $a$  und  $b$  seien aus  $\mathbb{C}^\infty \setminus G$ , und  $z_0$  aus  $G \setminus \{\infty\}$ . Wir wählen eine biholomorphe Abbildung  $T_1$  auf  $\mathbb{C}^\infty$  so, dass  $T_1(a) = 0$ ,  $T_1(b) = \infty$ . (Man kann z.B.

$$T_1 : z \mapsto \begin{cases} \frac{z-a}{z-b} & \text{für } a, b \neq \infty \\ \frac{1}{z-b} & \text{für } a = \infty, b \neq \infty \\ z - a & \text{für } a \neq \infty, b = \infty \end{cases}$$

wählen.) Dann ist  $G_1 := T_1 G$  ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Auf  $G_1$  existiert daher eine Quadratwurzel  $T_2$  (d.h.  $(T_2(z))^2 = z$  für alle  $z \in G_1$ ), und  $G_1$  wird durch  $T_2$  biholomorph auf ein Gebiet  $G_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet. (↗ Übung. Die Existenz einer solchen Quadratwurzel folgt auch mit dem Kreiskettenverfahren.)

Ist  $w_0$  irgendein Punkt in  $G_2$ , so gibt es eine Kreisscheibe  $B_r(w_0)$  mit  $\overline{B_r(w_0)} \subset G_2$ . Dann ist aber  $\overline{B_r(-w_0)} \cap G_2 = \emptyset$ . Mit  $w \in G_2$  kann nämlich nicht gleichzeitig  $-w \in G_2$  gelten, da sonst  $T_2$  nicht bijektiv wäre. Im Komplement von  $G_2$  liegt also eine komplette abgeschlossene Kreisscheibe, nämlich  $\overline{B_r(-w_0)}$ .

Wir wählen nun eine biholomorphe Abbildung  $T_3 : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ , die  $\mathbb{C}^\infty \setminus \overline{B_r(-w_0)}$  auf  $\mathbb{D}$  abbildet. Dies wird z.B. erreicht durch

$$T_3 : z \mapsto \frac{r}{z + w_0}.$$

Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(-w_0)}$  ist nämlich  $|z + w_0| > r$ , d.h.  $|T_3(z)| < 1$ . Wegen  $G_2 \subseteq \mathbb{C}^\infty \setminus \overline{B_r(-w_0)}$  ist also  $G_3 := T_3 G_2$  ein in  $\mathbb{D}$  enthaltenes einfach zusammenhängendes Gebiet.

Sei noch  $z_3 := T_3 \circ T_2 \circ T_1(z_0) \in G_3 \subset \mathbb{D}$ . Dann ist

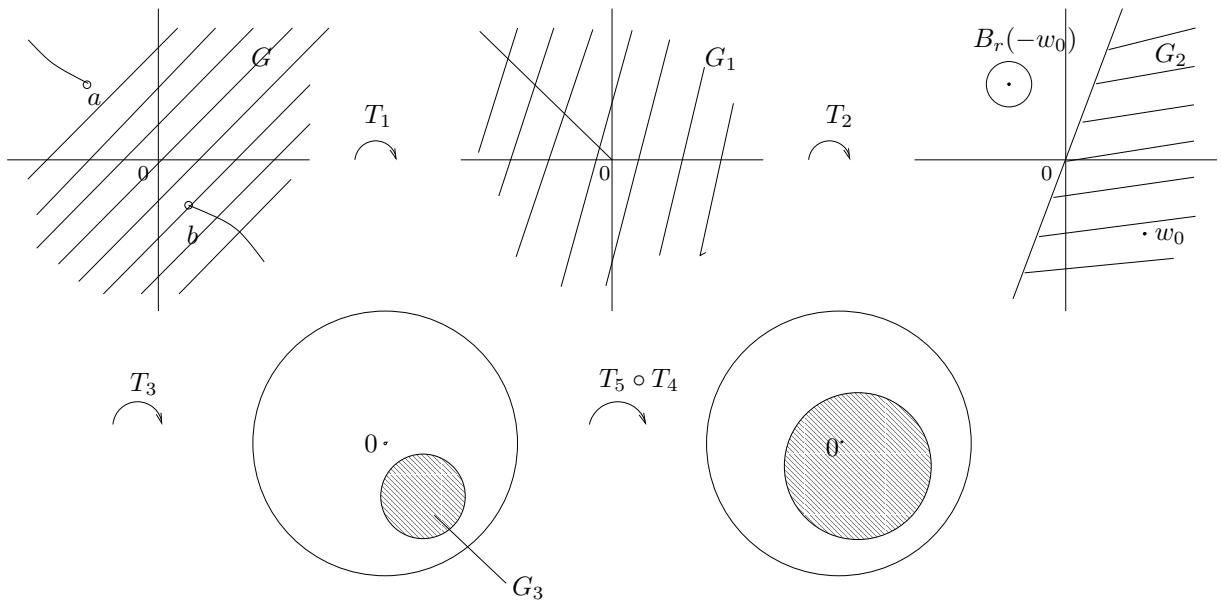
$$T_4 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z - z_3}{1 - \overline{z_3}z}$$

eine biholomorphe Abbildung, die  $\mathbb{D}$  auf sich und  $z_3$  in 0 abbildet. Schließlich ist, da alle Abbildungen  $T_i$  biholomorph sind,  $(T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)'(z_0) =: a_0$  ungleich 0 (vgl. Biholomorphiekriterium). Es gibt also ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $e^{i\varphi} a_0 > 0$ . Mit der Drehung

$$T_5 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto e^{i\varphi} z$$

haben wir damit das Gewünschte erhalten: die Funktion  $f_1 := T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$  bildet  $G$  biholomorph auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G^* \subset \mathbb{D}$  ab, und es gilt  $f_1(z_0) = 0$  sowie  $f_1'(z_0) > 0$ .





Zu (b). Sei nun also  $G^* \subset \mathbb{D}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $0 \in G^*$ . Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \{f : G^* \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

Diese Funktionenmenge ist nicht leer, denn die identische Abbildung  $z \mapsto z$  liegt in  $\mathcal{F}$ , und diese Menge ist durch 1 beschränkt. Nach dem Satz von Montel ist  $\mathcal{F}$  also eine normale Familie. Es sei

$$\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(0).$$

Da die Funktion  $z \mapsto z$  zu  $\mathcal{F}$  gehört, ist  $\alpha \geq 1$ . Wir zeigen, dass  $\alpha < \infty$ . Dazu sei  $(f_n)$  eine Folge aus  $\mathcal{F}$  mit  $f'_n(0) \rightarrow \alpha$ . Da  $\mathcal{F}$  eine normale Familie ist, enthält die Folge  $(f_n)$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, die wir der Einfachheit halber wieder mit  $(f_n)$  bezeichnen. Ihre Grenzfunktion nennen wir  $f_0$ . Nach dem Satz von Weierstraß (= Satz 5.3) gilt  $f'_n(0) \rightarrow f'_0(0)$ , also ist  $\alpha = f'_0(0)$  endlich. Wir überlegen uns noch, dass  $f_0 \in \mathcal{F}$ . Zunächst ist wegen  $\alpha = f'_0(0) \neq 0$  die Funktion  $f_0$  nicht konstant. Weiter: aus  $|f_n| < 1$  auf  $G^*$  folgt  $|f_0| \leq 1$  auf  $G^*$ . Nach dem Maximumprinzip ist dann sogar  $|f_0| < 1$  auf  $G^*$ , d.h.  $f_0(G^*) \subseteq \mathbb{D}$ . Schließlich ist  $f_0$  injektiv nach Folgerung 5.7. Da natürlich  $f_0(0) = 0$  ist, folgt die Behauptung  $f_0 \in \mathcal{F}$ .

Zu (c). Sei  $G^* \subseteq \mathbb{D}$  wie in (a) konstruiert und  $f_0 : G^* \rightarrow \mathbb{D}$  wie in (b) definiert. Wir wollen nun zeigen, dass  $f_0(G^*) = \mathbb{D}$ . Dazu beweisen wir folgende Aussage, die man als Umkehrung des Schwarzschen Lemmas ( $\nearrow$  Abschnitt 3.3) deuten kann.

**Lemma 5.16** Sei  $G_0$  ein einfach zusammenhängendes echtes Teilgebiet von  $\mathbb{D}$  mit  $0 \in G_0$ . Dann gibt es eine injektive holomorphe Funktion  $h : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $h(0) = 0$  und  $h'(0) > 1$ .

Angenommen, dieses Lemma wäre bereits bewiesen. Dann könnten wir den Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes wie folgt beenden: Wir wollen zeigen, dass  $f_0(G^*) = \mathbb{D}$ . Wäre  $G_0 := f_0(G^*)$  eine *echte* Teilmenge von  $\mathbb{D}$ , so könnte man eine Funktion  $h : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$  wie im Lemma wählen. Dann wäre  $h \circ f_0$  eine Funktion aus  $\mathcal{F}$ , für deren Ableitung in 0 gilt

$$(h \circ f_0)'(0) = h'(f_0(0)) \cdot f_0'(0) = h'(0) \cdot \alpha > \alpha.$$

Dies widerspricht der Definition  $\alpha := \sup \{f'(0) : f \in \mathcal{F}\}$  von  $\alpha$ . ■

**Beweis des Lemmas** Wir wählen einen Punkt  $c \in \mathbb{D} \setminus G_0$ . Dann ist

$$S_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$ , die  $c$  in 0 und 0 in  $-c$  überführt. Also enthält  $S_1(G_0)$  den Nullpunkt nicht, und da außerdem  $S_1(G_0)$  wieder einfach zusammenhängend ist, gibt es auf  $S_1(G_0)$  einen holomorphen Zweig  $S_2$  der Quadratwurzel.  $S_2$  ist injektiv, und  $(S_2 \circ S_1)(G_0) \subseteq \mathbb{D}$ . Mit  $d := S_2(-c)$  (beachte:  $-c \in S_1(G_0)$ ) und einem beliebigen  $\lambda \in \mathbb{R}$  (welches wir später genau festlegen) sei

$$S_3 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto e^{i\lambda} \frac{z - d}{1 - \bar{d}z}.$$

Wir betrachten die Funktion  $h := S_3 \circ S_2 \circ S_1 : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$ . Es ist  $h(0) = S_3(S_2(-c)) = S_3(d) = 0$  und (da alle betrachteten Funktionen biholomorph sind, vgl. Biholomorphiekriterium)  $h'(0) \neq 0$ . Wir wählen und fixieren  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $h'(0) > 0$ . Abschließend überlegen wir uns, dass dann bereits  $h'(0) > 1$  sein muß.

Es sei  $S_2^* : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $z \mapsto z^2$ . Dann ist  $h^* := S_1^{(-1)} \circ S_2^* \circ S_3^{(-1)}$  eine holomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  in sich. Da die Einschränkung von  $S_2^*$  auf  $S_2(S_1(G_0))$  die Umkehrabbildung zu  $S_2$  ist, ist die Einschränkung von  $h^*$  auf  $S_3(S_2(S_1(G_0))) = h(G_0)$  die Umkehrabbildung zu  $h$ . Es ist also  $h^*(0) = 0$ , die Abbildung  $h^*$  ist jedoch keine Drehung von  $\mathbb{D}$  ( $h^*$  ist nicht einmal injektiv, da zwar  $S_1$  und  $S_2$  bijektiv sind, die Abbildung  $S_2^*$  aber z.B.  $+1/2$  und  $-1/2$  jeweils auf  $1/4$  abbildet). Nach dem Lemma von Schwarz ist daher  $|(h^*)'(0)| < 1$ . Dann ist aber

$$h'(0) = 1/(h^*)'(0) > 1,$$

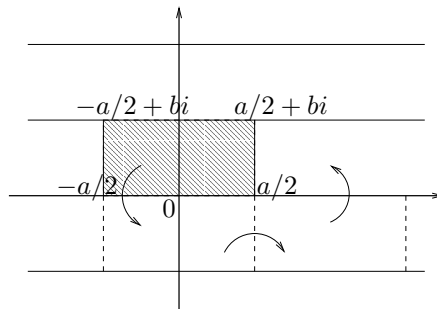
was zu zeigen war. ■

Als triviale Folgerung erhält man, dass insbesondere jedes von  $\mathbb{C}^\infty$  verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet umkehrbar stetig auf  $\mathbb{D}$  abgebildet werden kann. Dies läßt sich auch direkt beweisen, ist aber ebenfalls keineswegs trivial.

Über die praktische Bestimmung von Riemann-Abbildungen für konkrete Gebiete kann man sich orientieren in *Prem Kythe: Computational Conformal Mapping*. Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, können Sie auch Bsp. 1 in IV, §9 von Behnke/Sommer durcharbeiten. Dort wird eine biholomorphe Abbildung untersucht, die das Rechteck mit Ecken in  $\pm a/2$  und  $\pm a/2 + bi$  auf die obere Halbebene abbildet, wobei  $\pm a/2$  in  $\pm 1$  und  $bi$  in  $\infty$  übergehen. Durch diese Festlegungen ist die gesuchte Abbildung  $f$  eindeutig bestimmt. Es wird dann (im wesentlichen mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip) gezeigt, dass sich  $f$  zu einer *doppelt-periodischen* Funktion mit den Perioden  $2a$  und  $2bi$  fortsetzen lässt, d.h. dass

$$f(z + m \cdot 2a + l \cdot 2bi) = f(z) \quad \forall m, l \in \mathbb{Z}.$$

Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  wird durch ein sog. elliptisches Integral beschrieben.



### 5.3 Zum Randverhalten Riemannscher Abbildungen

Wir wenden uns noch kurz der Frage zu, ob sich eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  wie im Riemannschen Abbildungssatz stetig auf den Rand von  $G$  fortsetzen lässt. Da wir etwas über den Rand von  $G$  aussagen wollen, ist es zweckmäßiger, statt  $f$  die Umkehrabbildung  $g : \mathbb{D} \rightarrow G$ ,  $g = f^{-1}$ , zu betrachten. Außerdem nehmen wir an, dass  $0 \in G$  und  $g(0) = 0$  sowie  $g'(0) > 0$ .

Wir nehmen zunächst einmal an,  $g$  ließe sich stetig auf den Rand  $\partial\mathbb{D}$  von  $\mathbb{D}$  fortsetzen. Dann gilt

$$g(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial G. \quad (5.2)$$

Ist nämlich  $a^* \in \partial\mathbb{D}$  und  $(a_n) \subset \mathbb{D}$  eine gegen  $a$  konvergierende Folge, so folgt aus der Stetigkeit von  $g$ , dass  $g(a_n) \rightarrow g(a^*) =: b^*$ . Wäre  $b^*$  im Inneren von  $G$ , so würde, da die Umkehrfunktion zu  $g$  in einer Umgebung von  $b^*$  stetig ist, gelten:

$$g^{(-1)}(g(a_n)) \rightarrow g^{(-1)}(b^*) \in \mathbb{D} \text{ bzw. } a_n \rightarrow a^* \in \mathbb{D}. \quad \downarrow$$

Wir überlegen uns weiter, dass

$$g(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{G}. \quad (5.3)$$

Aus  $g(\mathbb{D}) = G$  und  $g(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial G$  folgt  $g(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \overline{G}$ . Sei  $b^* \in \partial G$ . Wir wählen eine Folge  $(b_n) \subset G$ , die gegen  $b^*$  konvergiert. Die Folge  $(a_n), a_n := g^{(-1)}(b_n)$  besitzt eine in  $\overline{\mathbb{D}}$  konvergente Teilfolge. Ist  $a^*$  ihr Grenzwert, so gilt  $g(a^*) = \lim g(a_n) = \lim b_n = b^*$ , d.h.  $b^* \in g(\overline{\mathbb{D}})$ .

Mit (5.2) und (5.3) und wegen  $g(\mathbb{D}) = G$  hat man nun  $g(\partial\mathbb{D}) = \partial G$ . Mit anderen Worten:  $\partial G$  ist ein stetiges Bild von  $\partial\mathbb{D}$ , d.h. eine geschlossene *Kurve*. Falls sich  $g$  sogar zu einem Homöomorphismus (d.h.  $g$  ist stetig, die Umkehrabbildung existiert und ist wieder stetig) von  $\overline{\mathbb{D}}$  auf  $\overline{G}$  fortsetzen läßt, so ist  $\partial G$  ein homöomorphes Bild von  $\partial\mathbb{D}$ , d.h. eine *Jordankurve*.

Bisher haben wir von der Holomorphie von  $g$  gar nicht Gebrauch gemacht. Es zeigt sich nun, dass für Abbildungen  $g$  wie im Riemannsches Abbildungssatz auch die Umkehrung gilt:

**Satz 5.17** *Sei  $g$  ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet und  $g : \mathbb{D} \rightarrow G$  die Riemann-Abbildung mit  $g(0) = 0$  und  $g'(0) > 0$ . Dann läßt sich  $g$  genau dann zu einem Homöomorphismus von  $\overline{\mathbb{D}}$  auf  $\overline{G}$  fortsetzen, wenn  $\partial G$  eine Jordan-Kurve ist.*

Einen Beweis finden Sie in Conway, *Functions Of One Complex Variable*, II. Springer, Theorem 5.6 in Abschnitt 14.8.

Dieses Resultat zeigt, dass das Randverhalten von Riemannabbildungen in vielen Fällen recht gut ist. Um den Gegensatz zum Randverhalten nicht-holomorpher stetiger Funktionen zu verdeutlichen, betrachten wir ein abschließendes Beispiel.

**Beispiel** Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto z e^{i \frac{1}{1-|z|}}$$

ist ein Homöomorphismus von  $\mathbb{D}$  auf sich. Betrachtet man für fixiertes  $\varphi \in \mathbb{R}$  aber das Verhalten von  $\varphi(e^{i\varphi}r)$  für  $(0, 1) \ni r \rightarrow 1$ , so ist wegen

$$\varphi(e^{i\varphi}r) = r e^{i\varphi} e^{i \frac{1}{1-r}}$$

klar, dass das Bild von  $e^{i\varphi}(0, 1)$  unter der Abbildung  $\varphi$  sich spiralförmig dem Einheitskreis  $\partial\mathbb{D}$  nähert und dabei den Nullpunkt unendlich oft umläuft. Obwohl der Rand  $\partial\mathbb{D}$  also so gut ist wie nur möglich, läßt sich  $\varphi$  nicht stetig auf diesen fortsetzen.