4 Funktionen mit isolierten Singularitäten

Funktionen wie $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$, $z \mapsto \tan z$ oder $z \mapsto e^{1/z}$ sind mit Ausnahme einzelner Punkte in $\mathbb{C}$ holomorph. In diesem Abschnitt untersuchen wir solche Funktionen in der Nähe ihrer „isolierten singulären Stellen“.

4.1 Holomorphe Funktionen in Kreisringen

Für $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichnen wir mit $K_c(r, R)$ den Kreisring mit den Radien r und R um c :

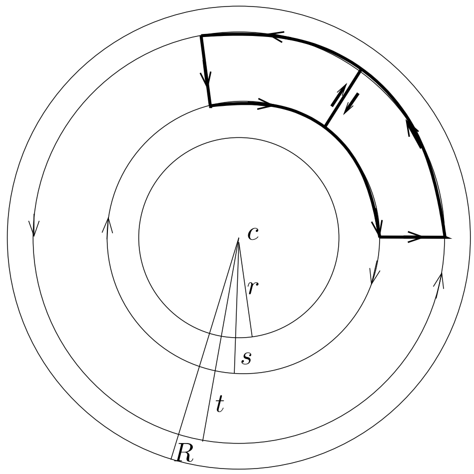
$$K_c(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - c| < R\}.$$

Dabei sind $r = 0$ und $R = \infty$ ausdrücklich zugelassen. $K_c(0, R)$ ist also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt, und $K_c(r, \infty)$ ist das komplette Äußere einer Kreisscheibe. Kreisringe sind nicht einfach zusammenhängend; wir überlegen uns daher zunächst den

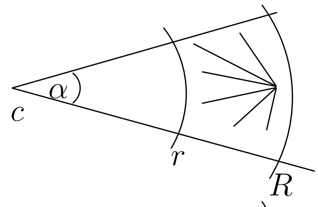
Satz 4.1 (Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe) *Die Funktion f sei holomorph im Kreisring $K_c(r, R)$, und seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $r < s < t < R$. Dann gilt*

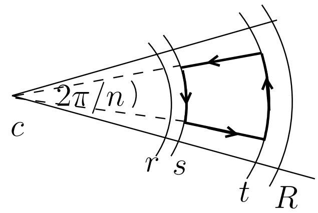
$$\int_{|\zeta - c| = s} f(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta - c| = t} f(\zeta) d\zeta.$$

Orientieren wir den Rand von $K_c(s, t)$ so, dass das Innere des Kreisringes stets links vom Rand liegt, kann die Aussage dieses Satzes auch geschrieben werden als $\int_{\partial K_c(s,t)} f(\zeta) d\zeta = 0$.
Wir vereinbaren, dass der Rand von $K_c(s, t)$ stets auf diese Weise orientiert ist.



Beweis Für $0 < \alpha < 2\pi$ betrachten wir einen Sektor des Kreisringes $K_c(r,R)$ mit „Öffnungswinkel" α. Es ist klar, dass dieser Sektor für hinreichend kleines α sternförmig ist. Für ein solches α wählen wir n so, dass $2\pi/n < \alpha$ wird und erzeugen wie in der Skizze aus der Integrationskurve $\partial K_c(s,t)$ n geschlossene Wege $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, von denen jeder in einem Sektor mit Öffnungswinkel α liegt und für die gilt





$$\int_{\partial K_c(s,t)} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(\zeta)d\zeta.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete sind alle Integrale $\int_{\Gamma_j} f(\zeta)d\zeta$ gleich Null. ∎

Satz 4.2 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe) *Seien r, R, s, t, f wie in Satz 4.1. Dann gilt für alle $z \in K_c(s,t)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_c(s,t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = t} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Beweis Für jedes feste $z \in K_c(s,t)$ ist die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in K_c(r,R)\backslash\{z\} \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

holomorph in $K_c(r,R)\backslash\{z\}$ und stetig auf $K_c(r,R)$. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz ist g holomorph auf ganz $K_c(r,R)$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt daher $\int_{|\zeta-c|=t} g(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta-c|=s} g(\zeta)d\zeta$ und somit

$$\int_{|\zeta-c|=t} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{|\zeta-c|=t} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = \int_{|\zeta-c|=s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{|\zeta-c|=s} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta.$$

Das zweite Integral auf der linken Seite ist $2\pi i$ da $|z - c| < t$, während das zweite Integral auf der rechten Seite wegen $|z - c| > s$ verschwindet. Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Ist eine Funktion f in $K_c(r,R)$ holomorph, so wird sie sich im allgemeinen über keinen der Randkreise hinaus holomorph fortsetzen lassen. Wir zeigen, dass sich f aber zerlegen läßt in zwei Funktionen, von denen die eine in $B_R(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < R\}$ und die andere in $A_r(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| > r\}$ holomorph ist.

Satz 4.3 *Sei f holomorph in $K_c(r,R)$. Dann gibt es auf $A_r(c)$ bzw. $B_R(c)$ holomorphe Funktionen f_1 bzw. f_2 so, dass $f = f_1 + f_2$ auf $K_c(r,R) = A_r(c) \cap B_R(c)$. Die Funktion f_1 kann so gewählt werden, dass $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$. Durch diese Bedingungen werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.*

Beweis Für jedes $\rho \in (r, R)$ definieren wir auf $B_\rho(c)$ eine Funktion $f_{2,\rho}$ durch

$$f_{2,\rho}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Diese ist nach dem Entwicklungslemma holomorph, und nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt $f_{2,\rho} = f_{2,\tilde{\rho}}$ auf $B_\rho(c)$, falls $\tilde{\rho} > \rho$. In diesem Sinn ist $f_{2,\rho}$ also unabhängig von ρ. Wir können daher eine auf ganz $B_R(c)$ holomorphe Funktion f_2 definieren, wenn wir für $z \in B_R(c)$ ein ρ zwischen $\max\{r, |z - c|\}$ und R wählen und setzen

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ganz analog finden wir eine auf $A_r(c)$ holomorphe Funktion f_1, indem wir für $z \in A_r(c)$ ein $\sigma \in (r, \min\{|z - c|, R\})$ wählen und definieren

$$f_1(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wegen

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\sigma \cdot \max_{|\zeta - c| = \sigma} |f(\zeta)| \cdot \max_{|\zeta - c| = \sigma} \frac{1}{|\zeta - z|}$$

folgt sofort $\lim_{z \to \infty} |f_1(z)| = 0$.

Ist nun $z \in K_c(r, R)$, so wählen wir ρ, σ mit $r < \sigma < |z - c| < \rho < R$ und erhalten mit der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f_2(z) + f_1(z)\,.$$

Zur Eindeutigkeit: Ist $f = g_1 + g_2$ eine analoge Zerlegung mit $\lim_{z \to \infty} g_1(z) = 0$, so gilt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf $K_c(r, R)$. Durch

$$h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf } A_r(c) \\ g_2 - f_2 & \text{auf } B_R(c) \end{cases}$$

wird also eine holomorphe Funktion h mit $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$ definiert. Nach Liouville ist h eine Konstante, und wegen $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$ ist h sogar gleich 0. Also ist $f_1 = g_1$ auf $A_r(c)$ und $f_2 = g_2$ auf $B_R(c)$. ∎

Die in Satz 4.3 erklärten Funktionen f_1 und f_2 heißen auch *Haupt-* und *Nebenteil* von f. Wie wir wissen, läßt sich der Nebenteil in eine auf $B_R(c)$ konvergente Potenzreihe entwickeln (Entwicklungssatz):

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n\,.$$

Eine ähnliche Darstellung wollen wir für den Hauptteil f_1 herleiten. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$F : B_{1/r}(0)\backslash\{0\} \to A_r(c)\,, \quad w \mapsto c + w^{-1}\,,$$

welche biholomorph ist (warum?). Die Funktion $f_1 \circ F$ ist daher holomorph auf $B_{1/r}(0)\backslash\{0\}$, und wegen $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$ folgt $\lim_{w\to 0}(f_1 \circ F)(w) = 0$. Wir können daher $f_1 \circ F$ durch den Wert 0 im Nullpunkt holomorph auf ganz $B_{1/r}(0)$ fortsetzen. Diese Funktion läßt sich dann in eine auf $B_{1/r}(0)$ konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$(f_1 \circ F)(w) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m w^m$$

(beachte: $b_0 = 0$, da $(f_1 \circ F)(0) = 0$ lt. Fortsetzung). Diese konvergiert für jedes $\rho > r$ auf $\overline{B_{1/\rho}(0)}$ gleichmäßig. Ersetzen wir $c+w^{-1}$ durch z bzw. w durch $(z-c)^{-1}$, erhalten wir die Reihendarstellung

$$f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-c)^{-m}\,,$$

welche für $\rho > r$ auf $\overline{A_\rho(c)}$ gleichmäßig konvergiert. Mit $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$ schreiben wir schließlich

$$f_1(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-c)^n\,.$$

Satz 4.4 (Entwicklungssatz von Laurent) *Sei f holomorph auf $K_c(r,R)$. Dann läßt sich f auf $K_c(r,R)$ in eine* Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \qquad (4.1)$$

entwickeln, die auf jeder kompakten Teilmenge von $K_c(r,R)$ gleichmäßig konvergiert. Für die Koeffizienten gilt für jedes $\rho \in (r,R)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}\,. \qquad (4.2)$$

Man nennt $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ auch *Haupt- und Nebenteil der Laurentreihe*. Wie wir gesehen haben, konvergieren diese Reihen auf kompakten Teilmengen von $B_R(c)$ bzw. $A_r(c)$ gegen den Haupt- bzw. Nebenteil von f.

Beweis Wir müssen nur noch die Formel für die Laurentkoeffizienten a_n zeigen. Diese leiten wir direkt aus der Reihenentwicklung ab. Für $\rho \in (r,R)$ konvergiert

$$(z-c)^{-n-1}f(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} a_{m+n+1}(z-c)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n+1}(z-c)^m$$

auf $|z-c|=\rho$ gleichmäßig. Gliedweise Integration ist daher erlaubt und liefert

$$\int_{|\zeta-c|=\rho} (\zeta-c)^{-n-1} f(\zeta) d\zeta = a_n \int_{|\zeta-c|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-c} = 2\pi i a_n$$

(alle übrigen Integrale verschwinden nach Beispiel 1 in 2.1). ■

Die explizite Bestimmung einer Laurentreihe mittels (4.2) ist i.a. schwierig. Um die Laurentreihe einer Funktion f zu ermitteln, sollte man eher versuchen, diese aus bekannten Potenzreihen (geometrische Reihe) zu ermitteln.

Beispiel Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der Punkte 1 und 2 holomorph. Sie läßt sich also auf $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in eine „gewöhnliche“ Potenzreihe (Taylorreihe) entwickeln und auf $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ sowie $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ in Laurentreihen.

Die Partialbruchzerlegung von f ist $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$, und für die Summanden $\frac{1}{z-1}$ und $\frac{1}{z-2}$ finden wir mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} &&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n && \text{für } |z|<1,\\
\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z/2)} &&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n && \text{für } |z|<2,\\
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} &&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} && \text{für } |z|>1,\\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(2/z)} &&= \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{z^n} && \text{für } |z|>2.
\end{aligned}$$

■

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n &&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n && \text{auf } D_1,\\
f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n &&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n && \text{auf } D_2,\\
f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{z^n} &&= \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1) z^{-n} &&\\
&= \sum_{n=-2}^{-\infty}(2^{-n-1}-1) z^n &&&& \text{auf } D_3.
\end{aligned}$$

■

4.2 Isolierte Singularitäten

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U Umgebung von z_0, und f sei eine auf $U\backslash\{z_0\}$ definierte und dort holomorphe Funktion. Dann heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von z_0. Die Funktion f kann in jedem Kreisring $K_{z_0}(0, R)$, der ganz in U liegt, in eine Laurentreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Man klassifiziert isolierte Singularitäten nach dem Verhalten des Hauptteiles dieser Laurentreihe.

Definition 4.5 (*a*) *z_0 heißt* hebbare Singularität*, wenn alle Laurentkoeffizienten im Hauptteil der Laurentreihe (d.h. alle a_n mit $n \leq -1$) verschwinden.*

(*b*) *z_0 heißt* Pol*, wenn z_0 keine hebbare Singularität ist, aber nur endlich viele Koeffizienten des Hauptteiles ungleich null sind. Ist $a_{-m} \neq 0$, aber $a_{-n} = 0$ für alle $n > m$, so heißt z_0* Pol der Ordnung *m.*

(*c*) *Ist z_0 weder hebbare Singularität noch Pol, so heißt z_0* wesentliche Singularität*. In diesem Fall sind also unendlich viele der Koeffizienten des Hauptteiles der Laurentreihe ungleich 0.*

Beispiel Für jede der Funktionen $f(z) = \frac{\sin z}{z}, g(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}, h(z) = e^{1/z}$ ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität. Im ersten Fall ist diese hebbar, da

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots ,$$

und diese Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$. Aus dem Beispiel in 4.1 wissen wir weiter, dass

$$g(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$$

auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Also ist $z_0 = 0$ ein Pol der Ordnung 1 von g. Schließlich ist

$$h(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n}$$

die Laurententwicklung von h in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. In diesem Fall ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. ∎

Wir beschreiben nun das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe von isolierten Singularitäten und beginnen mit den beiden einfachsten Situationen.

Satz 4.6 *Sei U offen und $z_0 \in U$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

(a) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn es eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0 gibt, so dass f auf $V \backslash \{z_0\}$ beschränkt ist.

(b) z_0 ist genau dann Pol, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Beweis (a) Sei z_0 hebbare Singularität, d.h. die Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ von f konvergiert auf jedem hinreichend kleinen Kreisring $K_{z_0}(0, R)$ um z_0. Dann konvergiert diese Reihe auch für $z = z_0$ und stellt eine auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ holomorphe Funktion $\hat{f}$ dar, die auf $K_{z_0}(0, R)$ mit f übereinstimmt. Da $\hat{f}$ auf der kompakten Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R/2\}$ stetig ist, folgt die Beschränktheit von $\hat{f}$ und damit von f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R/2\} \backslash \{0\}$.
Ist umgekehrt f auf $V \backslash \{z_0\}$ holomorph und beschränkt, so läßt sich f nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz zu einer auf ganz V holomorphen Funktion $\hat{f}$ fortsetzen. Diese läßt sich in jeder Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subseteq V$ in eine Potenzreihe entwickeln: $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$. Diese Reihe ist zugleich die Laurentreihe von f auf $K_{z_0}(0, R)$.
(b) Sei z_0 ein Pol der Ordnung m und $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurentreihe von f auf $K_{z_0}(0, R) \subset U$. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} h(z)$$

mit einer auf ganz $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ durch $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$ definierten und dort holomorphen Funktion h, für die außerdem $h(z_0) = a_{-m} \neq 0$ gilt. Wegen $\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{-m} = \infty$ folgt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
Ist umgekehrt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, so gibt es eine punktierte Umgebung $V \backslash \{z_0\}$ von z_0, auf der f nicht verschwindet. Auf dieser ist $1/f$ holomorph, und es gilt $\lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0$. Also läßt sich $1/f$ durch den Wert 0 holomorph auf z_0 fortsetzen. Die Potenzreihe von $1/f$ ist sicher nicht die Nullreihe. Daher ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \, g(z)$$

mit einer in V holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und mit einer eindeutig bestimmten positiven ganzen Zahl m. Dann ist aber

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \, h(z) \tag{4.3}$$

mit einer in einer Umgebung W von z_0 holomorphen und in z_0 nicht verschwindenden Funktion $h = 1/g$. Setzen wir in (4.3) für h die Potenzreihenentwicklung ein, so erhalten wir die Laurentreihe von f auf einem geeigneten Ring $K_{z_0}(0, R) \subset W$ und sehen, dass z_0 ein Pol der Ordnung m von f ist. ■

Aus dem Beweis gewinnt man, dass z_0 genau dann ein Pol der Ordnung m ist, wenn

$$M_1|z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq M_2|z - z_0|^{-m}$$

mit Konstanten M_1, M_2 in einer punktierten Umgebung $V \backslash \{z_0\}$ von z_0 gilt. Das Verhalten in der Nähe wesentlicher Singularitäten wird beschrieben durch

Satz 4.7 (Casorati-Weierstraß) *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 gilt: z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $U \backslash \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ und $f(z_n) \to w$ existiert oder, anders formuliert, wenn für jede punktierte Umgebung $V \backslash \{z_0\}$ von z_0 das Bild $f(V \backslash \{z_0\})$ in $\mathbb{C}$ dicht liegt.*

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass $f(V \backslash \{z_0\})$ nach dem Offenheitssatz eine offene Menge ist.

Beweis Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Angenommen, es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0, für die $f(V \backslash \{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. Dann gibt es eine offene Kreisscheibe $B_r(w_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w_0| < r\}$, die von $f(V \backslash \{z_0\})$ nicht getroffen wird. Es ist also $|f(z) - w_0| \geq r$ für alle $z \in V \backslash \{z_0\}$. Dann ist aber die Funktion $g(z) := 1/(f(z) - w_0)$ auf $V \backslash \{z_0\}$ holomorph und durch $1/r$ beschränkt. Diese Funktion hat also eine hebbare Singularität in z_0. Im Falle $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$ hat dann offenbar $f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ eine hebbare Singularität in z_0, und im Fall $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ hat f einen Pol in z_0. In keinem Fall hätte f also eine wesentliche Singularität, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Die umgekehrte Implikation ist mit Satz 4.6 klar. ■

Auf ähnliche Weise klassifiziert man das Verhalten einer holomorphen Funktion im Unendlichen. Genauer: Ist die Funktion f auf einem Kreisring $K_0(r, \infty)$ definiert und holomorph, so sagt man, dass ∞ eine isolierte Singularität von f ist. In diesem Fall ist die durch $\tilde{f}(z) := f(1/z)$ erklärte Funktion $\tilde{f}$ auf dem Kreisring $K_0(0, 1/r)$ holomorph und hat 0 als isolierte Singularität (man beachte, dass $z \mapsto 1/z$ eine biholomorphe Abbildung von $K_0(r, \infty)$ auf $K_0(0, 1/r)$ ist). Man schreibt nun der Funktion f in ∞ das gleiche Verhalten zu wie es die Funktion $\tilde{f}$ im Punkt 0 aufweist. Für Polynome $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ mit $a_n \neq 0$ ist $\tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^{-j}$. In diesem Sinne hat ein Polynom vom Grad n einen Pol der Ordnung n in ∞. Dagegen besitzt $f(z) = e^z$ in ∞ eine wesentliche Singularität. Das Verhalten an der isolierten Singularität ∞ wird wieder durch die Sätze 4.6 und 4.7 beschrieben.

4.3 Meromorphe Funktionen

Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer isolierten Singularität z_0 bleibt übersichtlich, wenn diese eine Polstelle ist. Wir betrachten daher

nur Funktionen, die nur Pole als singuläre Stellen haben.
Zur Erinnerung: Eine Teilmenge A einer offenen Menge D heißt *diskret in* D, wenn jeder Punkt von D eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele Punkte aus A enthält.

Definition 4.8 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt* meromorph *in D, wenn es eine diskrete Teilmenge $P(f)$ von D so gibt, dass f auf $D \backslash P(f)$ holomorph ist und in jedem Punkt von $P(f)$ einen Pol hat.*

Diese Menge $P(f)$ heißt dann auch die *Polstellenmenge* von f in D. Zugelassen ist $P(f) = \emptyset$. Die auf D holomorphen Funktionen sind also auch meromorph.
Seien f und g zwei auf einer offenen Menge D meromorphe Funktionen mit Polstellenmengen $P(f)$ und $P(g)$. Dann ist $P(f) \cup P(g)$ eine diskrete Teilmenge von D, und die auf $D \backslash (P(f) \cup P(g))$ definierte Funktion $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$ ist auf dieser Menge holomorph. Alle Singularitäten von $f+g$ sind also wieder isoliert, und wir zeigen, dass alle Singularitäten entweder hebbar oder Pole sind. Zu jedem $c \in P(f) \cup P(g)$ gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von c mit $U \cap (P(f) \cup P(g)) = \{c\}$ und es gibt Zahlen m, n so, dass $z \mapsto (z-c)^m f(z)$ bzw. $z \mapsto (z-c)^n g(z)$ in $U \backslash \{c\}$ beschränkte Funktionen sind. Dann ist aber auch die Funktion

$$z \mapsto (z-c)^{\max\{m,n\}}(f(z)+g(z)) \quad \text{beschränkt in } U \backslash \{c\}. \tag{4.4}$$

Die Funktion (4.4) kann also zu einer auf U holomorphen Funktion fortgesetzt werden, und nun ist klar, dass c hebbare Singularität oder Pol von $f+g$ ist. Die Summe zweier auf D meromorpher Funktionen ist also wieder meromorph auf D. Ähnlich zeigt man, dass auch Produkte meromorpher Funktionen wieder meromorph sind.
Wir betrachten noch die Division meromorpher Funktionen und definieren dazu die Nullstellenmenge $N(f)$ einer meromorphen Funktion f auf D als die Nullstellenmenge der holomorphen Funktion $f : D \backslash P(f) \to \mathbb{C}$. Sei nun f meromorph auf D, und $N(f)$ sei eine diskrete Menge in D. Dann ist auch $N(f) \cup P(f)$ eine diskrete Teilmenge von D, und auf $D \backslash (N(f) \cup P(f))$ ist die Funktion $1/f$ holomorph. Alle Singularitäten von $1/f$ sind isoliert. Genauer: Ist $c \in N(f)$, so ist $\lim_{z \to c} \frac{1}{f(z)} = \infty$, d.h. c ist Pol von $1/f$, und ist $c \in P(f)$, so ist $\lim_{z \to c} \frac{1}{f(z)} = 0$, d.h. c ist hebbare Singularität. Also ist $1/f$ meromorph. Damit ist auch klar: sind f und g meromorph auf D und ist $N(g)$ diskret, so ist f/g meromorph. Im wesentlichen haben wir damit bewiesen:

Satz 4.9 *Die auf einem Gebiet meromorphen Funktionen bilden einen Körper.*

Zum Beweis Man muß sich nur noch klarmachen, dass jede meromorphe Funktion auf einem Gebiet G, die nicht die Nullfunktion ist, invertiert werden kann. Dazu brauchen wir nur, dass die Nullstellenmenge dieser Funktion diskret ist.

Dies folgt aus dem Identitätssatz, denn würden sich die Nullstellen in D häufen, wäre die Funktion identisch Null. ■

Sind insbesondere f und g auf einem Gebiet G holomorphe Funktionen mit $g \not\equiv 0$, so ist f/g meromorph auf G. Beispielsweise sind alle *rationalen Funktionen* (d.h. alle Quotienten P/Q von Polynomen $P, Q \not\equiv 0$) oder etwa die Funktion $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ meromorph auf $\mathbb{C}$. Es ist bemerkenswert, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 4.10 *Die Menge der auf einem Gebiet G meromorphen Funktionen besteht genau aus allen Quotienten f/g von auf G holomorphen Funktionen mit $g \not\equiv 0$.*

Einen Beweis findet man in [Remmert, Funktionentheorie II] oder in [Fischer/Lieb, Funktionentheorie, Satz 5.1 in Kapitel VIII]. Der Körper der auf einem Gebiet meromorphen Funktionen ist also gerade der Quotientenkörper des Ringes der auf diesem Gebiet holomorphen Funktionen.

4.4 Residuen

Ist D offen, $c \in D, f$ holomorph in $D\backslash\{c\}$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die in einem Kreisring $K_c(0,R) \subset D$ um c konvergente Laurentreihe von f, so ist nach Satz 4.4

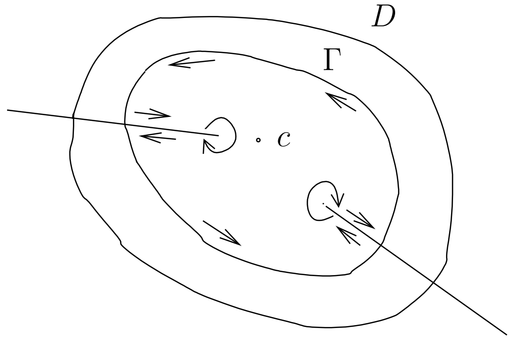
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{S}} f(\zeta)d\zeta$$

für jede Kreislinie $\mathcal{S} \subset K_c(0,R)$ um c. Von allen Laurentkoeffizienten bleibt also bei einer Integration von f um c nur a_{-1} übrig. Dieses „Überbleibsel“ heißt das *Residuum* von f im Punkt c. Wir schreiben auch $\mathrm{res}_c f := a_{-1}$. Das Residuum von f ist also in allen isolierten Singularitäten von f definiert. Mitunter definiert man das Residuum auch an den Holomorphiepunkten von f, indem man es dort gleich Null setzt.

Satz 4.11 (Residuensatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in D mit $\overline{G} \subseteq D$, das von einer stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Kurve Γ berandet wird, die im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Weiter sei A eine endliche Teilmenge von D mit $A \cap \Gamma = \emptyset$, und die Funktion f sei holomorph auf $D\backslash A$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{a\in A\cap G} \mathrm{res}_a f.$$

Beweisidee Nachdem wir gegebenenfalls D durch eine hinreichend kleine Umgebung von $\overline{G}$ ersetzt haben, können wir annehmen, dass D ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand ist und dass $A \subset G$. Für jeden Punkt $a \in A$ schneiden wir das Gebiet D entlang einer in a beginnenden Strecke $\mathcal{S}_a$ bis zum Rand von D auf, wobei keine zwei der Strecken $\mathcal{S}_a$ einen nichtleeren Durchschnitt haben sollen.



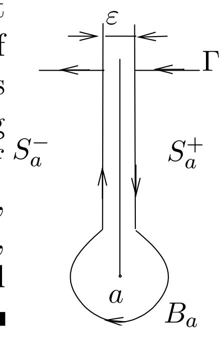
Weiter findet man zu jedem $a \in A \cap G$ eine Kreisscheibe $B_a \subset G$ um a so, dass $\overline{B}_a \subset G$ und $\overline{B}_a \cap \overline{B}_b = \emptyset$ für $a, b \in A \cap G$ mit $a \neq b$. Aus Γ, den Strecken $\mathcal{S}_a \cap (\overline{G} \backslash B_a)$ und den Kreislinien ∂B_a bilden wir einen stückweise stetig differenzierbaren und geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$ wie in der Skizze.
Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0,$$

und da sich die Integrale längs der entlang $\mathcal{S}_a$ verlaufenden Wegstücke aufheben, folgt

$$\int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{a \in A \cap G} \int_{\partial B_a} f(z)dz = 0,$$

d.h. der Residuensatz.
Genau genommen dürfen wir den Cauchyschen Integralsatz nicht unmittelbar anwenden, da $\tilde{\gamma}$ zum Teil auf dem Rand (nämlich auf $\mathcal{S}_a \cap D$) des Gebietes $D \backslash \cup_{a \in A \cap G} \mathcal{S}_a$ verläuft. Man betrachtet für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ einen stückweise glatten geschlossenen Weg γ_ε wie in der Skizze, der nun komplett in $D \backslash \cup_{a \in A \cap G} \mathcal{S}_a$ liegt. Da f auf jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\mathcal{S}_a \cap (\overline{G} \backslash B_a)$ stetig ist, schließt man wie im Beweis des Schwarzschen Spiegelungssatzes, dass der Beitrag von $\int_{\mathcal{S}_a^+} f(z)dz + \int_{\mathcal{S}_a^-} f(z)dz$ zum Gesamtintegral beliebig klein wird, wenn ε klein genug ist. ■



In vielen Fällen ist es möglich, Residuen ohne explizite Berechnung von Umlaufintegralen zu ermitteln. Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1 Ist c ein einfacher Pol von f, so ist

$$\mathrm{res}_c f = \lim_{z \to c} (z - c) f(z)\,. \tag{4.5}$$

Dies ist offensichtlich, da ja $f(z) = a_{-1}(z - c)^{-1} + h(z)$ mit einer holomorphen Funktion h. Als Folgerung erhalten wir

Lemma 4.12 *Sind g und h holomorph in einer Umgebung von c und gilt $g(c) \neq 0, h(c) = 0$ und $h'(c) \neq 0$, so hat $f := g/h$ in c einen Pol erster Ordnung, und es gilt*

$$\mathrm{res}_c f = g(c)/h'(c). \tag{4.6}$$

Beweis Die Taylorentwicklung von h um c ist

$$h(z) = h'(c)(z-c) + \cdots = (z-c)\Big(h'(c) + \cdots .$$

Daher ist c einfacher Pol von f, und es gilt mit (4.5)

$$\mathrm{res}_c f = \lim_{z \to c}(z-c)f(z) = \lim_{z \to c} \frac{(z-c)g(z)}{h(z)-h(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}. \qquad \blacksquare$$

Betrachten wir etwa die Funktion $f(z) = z/(z^n - 1)$. Die Nullstellen des Nenners sind die n. Einheitswurzeln $c_k := e^{2\pi i k/n}$ mit $k = 0, \cdots, n-1$, und all diese Nullstellen sind einfach. Folglich besitzt f in jedem der Punkte c_k einen einfachen Pol, und es gilt

$$\mathrm{res}_{c_k} f = \frac{c_k}{n\, c_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{c_k^2}{c_k^n} = \frac{c_k^2}{n} = \frac{1}{n} e^{4\pi i k/n}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 2 Etwas weniger handlich ist die Residuenbestimmung bei Polen höherer Ordnung.

Lemma 4.13 *Hat f in c einen Pol höchstens m. Ordnung, und ist g die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z-c)^m f(z)$ nach c, so gilt*

$$\mathrm{res}_c f = \frac{1}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(c). \tag{4.7}$$

Beweis Die Laurententwicklung von f um c ist $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + h(z)$ mit einer in einer Umgebung von c holomorphen Funktion h. Dann ist

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{m-1} + \cdots$$

die Taylorreihe von g um c, und es ist unmittelbar klar, dass

$$g^{(m-1)}(c) = (m-1)!\, a_{-1}. \qquad \blacksquare$$

Zur Illustration betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$, welche in $\pm i$ jeweils einen n-fachen Pol besitzt. Um $\mathrm{res}_i f$ zu bestimmen, betrachten wir die in einer Umgebung von i holomorphe Funktion $g(z) = (z-i)^n f(z) = (z+i)^{-n}$. Es ist

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(z) &= (-n)(-n-1) \cdots (-n-n+2)\,(z+i)^{-n-n+1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\operatorname{res}_i f = \frac{1}{(n-1)!}\,(-1)^{n-1}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\,\frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i\,\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\,\frac{1}{2^{2n-1}}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 3 Für jede in einer Umgebung von c holomorphe Funktion g mit $g(c) = 0$ definieren wir die *Ordnung* $n_c(g)$ der Nullstelle c von g als kleinste Zahl n, für die eine um c holomorphe Funktion $\tilde{g}$ mit $g(z) = (z-c)^n \tilde{g}(z)$ und $\tilde{g}(c) \neq 0$ existiert.

Lemma 4.14 *Seien g, h holomorph in einer Umgebung von c, und c sei eine Nullstelle von g der Ordnung $n_c(g)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_c\left(h\,\frac{g'}{g}\right) = h(c)\,\cdot\,n_c(g). \tag{4.8}$$

Beweis Sei $n := n_c(g)$. Dann gibt es eine um c holomorphe Funktion $\tilde{g}$ mit $\tilde{g}(c) \neq 0$ und $g(z) = (z-c)^n\,\tilde{g}(z)$. Es folgt

$$h(z)\,\frac{g'(z)}{g(z)} = h(z)\,\frac{n(z-c)^{n-1}\tilde{g}(z) + (z-c)^n \tilde{g}'(z)}{(z-c)^n \tilde{g}(z)} = \frac{n\,\cdot h(z)}{z-c} + f$$

mit einer in einer Umgebung von c holomorphen Funktion f. Mit (4.5) folgt sofort die Behauptung. $\blacksquare$

Ganz analog zeigt man:

Lemma 4.15 *Sei h holomorph in einer Umgebung von c, und g habe in c einen Pol der Ordnung $p_c(g)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_c\left(h\,\frac{g'}{g}\right) = -h(c)\,\cdot\,p_c(g). \tag{4.9}$$

$\blacksquare$

Wir sehen uns nun einige Folgerungen aus dem Residuensatz an. Eine der bemerkenswerten Konsequenzen ist eine Anzahlformel für Null- und Polstellen meromorpher Funktionen. Wir leiten sie aus einem allgemeineren Satz her und bezeichnen dazu die Menge der Polstellen bzw. Nullstellen einer meromorphen Funktion f in einer Menge D mit $P_D(f)$ bzw. $N_D(f)$.

Satz 4.16 *Es seien D, G, Γ wie im Residuensatz, f sei eine auf D meromorphe Funktion mit endlich vielen Pol- und Nullstellen, von denen keine auf Γ liegen soll, und F sei holomorph auf D. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{c\in N_G(f)} n_c(f)F(c) \;-\; \sum_{c\in P_G(f)} p_c(f)\,F(c). \tag{4.10}$$

Beweis Die auf G meromorphe Funktion $F\,f'/f$ besitzt höchstens in den Punkten von $N_G(f) \cup P_G(f)$ nicht verschwindende Residuen. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{c\in N_G(f)\cup P_G(f)} \operatorname{res}_c\left(F\,\frac{f'}{f}\right).$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus den Lemmas 4.14 und 4.15. ■

Bezeichnen wir schließlich mit

$$\#N_G(f) := \sum_{c\in N_G(f)} n_c(f) \quad \text{bzw.} \quad \#P_G(f) := \sum_{c\in P_G(f)} p_c(f)$$

die Anzahl aller Null- bzw. Polstellen (unter Beachtung ihrer Vielfachheit) der meromorphen Funktion f in G, so folgt aus (4.10), indem wir dort $F \equiv 1$ setzen:

Satz 4.17 *Seien D, G, Γ, f wie in Satz 4.16. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \#N_G(f)\ -\ \#P_G(f).$$

Wir geben noch einige Anwendungen der Sätze 4.16 und 4.17 an.

Anwendung 1: Umkehrabbildungen biholomorpher Funktionen. *Seien D, D' offen, $f : D \to D'$ eine biholomorphe Funktion und $\overline{B}$ eine kompakte Kreisscheibe in D, deren Rand im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Dann wird die Umkehrabbildung $f^{(-1)}$ zu f auf $f(B)$ gegeben durch*

$$f^{(-1)}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} z\,\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz \quad \text{für } w \in f(B).$$

Beweis Die Funktion $z \mapsto f(z)-w$ hat keine Pole in D und wegen der Injektivität genau eine Nullstelle in B, die wir c nennen. Diese Nullstelle ist einfach (sonst wäre $f'(c) = 0$, was dem Biholomorphiekriterium widerspricht). Also gilt nach (4.10)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} z\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = c.$$

Nun ist aber $f(c) - w = 0$, d.h. $c = f^{(-1)}(w)$, woraus die Behauptung folgt. ■

Anwendung 2: Alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Nach Lemma 3.5 gibt es ein R so, dass $|P(z)| \geq 1$ für alle $|z| \geq R$. Für $|z| \geq R$ hat man nun

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n\,z^{n-1}+\cdots}{z^n+\cdots} = \frac{n}{z} + \text{ Terme in } \frac{1}{z^k} \text{ mit } k \geq 2. \tag{4.11}$$

Integriert man die linke Seite von (4.11) über $\partial B_R(0)$, so folgt (da P keine Pole in $\mathbb{C}$ hat)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \#N_{B_R(0)}(P).$$

Die gleiche Integration über die rechte Seite von (4.11) liefert den Wert n. Also ist

$$\#N_{B_R(0)}(P) = n = \text{ Grad des Polynoms.}$$

Hieraus folgt für $n \geq 1$ die Existenz von Nullstellen und außerdem, da alle Nullstellen von P im Kreis $B_R(0)$ liegen, auch, dass Polynome vom Grad ($n \geq 1$) genau n Nullstellen besitzen. ■

Anwendung 3: Satz von Rouché *Seien D, G, Γ wie im Residuensatz, die Funktionen f und g seien holomorph in D, und es gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \textit{für alle}\, z \in \Gamma. \tag{4.12}$$

Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in G:

$$\#N_G(f) = \#N_G(g).$$

Beweis Für jedes $t \in [0,1]$ betrachten wir die Funktion $h_t := g + t(f-g)$. Diese Funktionen sind holomorph auf D, und nach Voraussetzung (4.12) gilt

$$|h_t(z)| \geq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0$$

auf Γ. Alle Funktionen h_t sind also nullstellenfrei auf Γ. Nach Satz 4.17 ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}dz = \#N_G(h_t).$$

Das linksstehende Integral nimmt nur ganzzahlige Werte an und hängt stetig von t ab. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, muß dieses Integral für alle t den gleichen Wert annehmen. Insbesondere ist $\#N_G(h_0) = \#N_G(h_1)$. Nun ist aber $h_0 = g$ und $h_1 = f$, woraus die Behauptung folgt. ■

Abschließend sehen wir uns noch einige Anwendungen des Residuensatzes zur Berechnung bestimmter Integrale an.

Beispiel 4 Trigonometrische Integrale. *Sei $R = R(z) = R(x,y)$ eine komplexe rationale Funktion, die keine Pole auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$ des Einheitskreises besitzt, und sei*

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z}\,R\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right).$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2\pi \sum_{c \in P_{\mathbb{D}}(\tilde{R})} \operatorname{res}_c(\tilde{R}). \tag{4.13}$$

Beweis Mit $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, gilt $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ und $\sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$. Also ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \frac{1}{i}\int_{\partial\mathbb{D}} \underbrace{R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{1}{z}}_{\tilde{R}(z)} dz.$$

Nun folgt (4.13) sofort aus dem Residuensatz. ∎

Als konkrete Anwendung berechnen wir $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p\cos t+p^2}$ mit $p \in \mathbb{C}, |p| \neq 1$. In diesem Fall ist $R(x, y) = \frac{1}{1-2px+p^2}$, also

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 - p(z + z^{-1}) + p^2} = \frac{1}{(z-p)(1-pz)}.$$

Die Funktion $\tilde{R}$ hat genau einen Pol in $\mathbb{D}$, nämlich in p falls $|p| < 1$ und in p^{-1} falls $|p| > 1$. In beiden Fällen ist der Pol einfach; es gilt daher

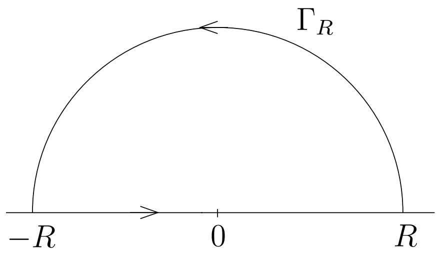
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p\cos t + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{falls } |p| < 1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

∎

Beispiel 5: Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. *Sei D eine offene Menge, die die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ umfaßt, f sei auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten, die alle in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ liegen, holomorph. Weiter existiere das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ $(= \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)dx + \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx)$, und es gelte $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{c\in P(f)} \operatorname{res}_c f. \tag{4.14}$$

Beweis Für jedes $R > 0$ sei $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Für hinreichend große R liegen alle Singularitäten von f in $B_R(0)$. Nach dem Residuensatz ist also



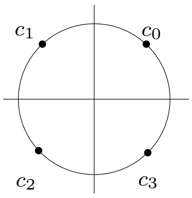
$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{c\in P(f)} \operatorname{res}_c f. \tag{4.15}$$

Nun ist aber

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|.$$

Wegen $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$ ist aber $\lim_{R\to\infty} R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| = 0$. Lassen wir also in (4.15) $R \to 0$ gehen, folgt die Behauptung (4.14). ■

Beispielsweise hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ genau vier einfache Pole: $c_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k = 0,1,2,3$, von denen genau zwei in der oberen Halbebene liegen. Außerdem überprüft man sofort, dass $\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$, und auch die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ als uneigentlichem Integral ist leicht einzusehen. Nach (4.14) gilt also



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i(\mathrm{res}_{c_0} f + \mathrm{res}_{c_1} f) \overset{(4.6)}{=} 2\pi i \left(\frac{1}{4c_0^3} + \frac{1}{4c_1^3} \right),$$

woraus sich nach kurzer Rechnung ergibt:

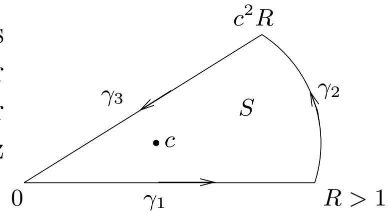
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

■

Beispiel 6 Die Integrale $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ für $m,n \in \mathbb{N}, 0 < m < n$. Der Integrand $f(z) = z^{m-1}(1+z^n)^{-1}$ hat in $c := e^{i\pi/n}$ einen Pol erster Ordnung, und nach Lemma 4.12 ist

$$\mathrm{res}_c f = \frac{c^{m-1}}{n\,c^{n-1}} = \frac{c^m}{n\,c^n} = -\frac{c^m}{n}.$$

Zur Auswertung des Integrals integrieren wir längs des Randes $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ des Kreissektors $\mathcal{S}$ wie in der Skizze. Die Funktion f ist bis auf den Punkt c in einer Umgebung von $\mathcal{S}$ holomorph. Nach dem Residuensatz ist also



$$\int_0^R f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = -\frac{2\pi i}{n}c^m. \tag{4.16}$$

Der Weg $-\gamma_3$ wird durch $t \mapsto tc^2$ mit $t \in [0,R]$ parametrisiert. Daher gilt

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_0^R \frac{t^{m-1}c^{2m-2}}{1+t^n \underbrace{c^{2n}}_{=1}} c^2 dt = -c^{2m} \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n}dt,$$

d.h. (4.16) geht über in

$$(c^{2m}-1)\int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n}dt \;-\; \int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{2\pi i}{n}c^m. \tag{4.17}$$

Weiter ist

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \frac{2\pi}{n} R \cdot \max_{z\in\gamma_2} |f(z)|$$

und

$$\lim_{R\to\infty} R \max_{z\in\gamma_2} |f(z)| = 0 \quad \text{wegen } m < n.$$

Der Grenzübergang $R \to \infty$ in (4.17) liefert also

$$(c^{2m} - 1)\int_0^\infty f(x)dx = \frac{2\pi i}{n}\, c^m.$$

Eine einfache Rechnung gibt schließlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n}\Big(\sin\frac{m}{n}\pi\Big)^{-1}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m < n$. ∎