3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

3.1 Der Identitätssatz

Der Identitätssatz zeigt einen überraschend engen Zusammenhang zwischen den Werten einer holomorphen Funktion auf.

Satz 3.1 (Identitätssatz) *Sei G ein Gebiet, und f, g seien holomorphe Funktionen auf G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f(z) = g(z) \quad \forall z \in G$.

(ii) Die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ enthält unendlich viele Punkte und besitzt einen Häufungspunkt in G.

(iii) Es gibt ein $c \in G$ so, dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \geq 0$.

Beweis *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: ist trivial.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $h := f - g$ und c ein Häufungspunkt der Menge $M := \{z \in G : h(z) = 0\}$. Wir zeigen, dass $h^{(n)}(c) = 0$ für alle n. Angenommen, dies gilt nicht. Dann finden wir ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ mit $h^{(m)}(c) \neq 0$. Nach dem Entwicklungssatz gilt dann auf jedem Kreis $B \subset G$ um c:

$$h(z) = (z - c)^m \, h_m(z) \,,$$

wobei h_m eine auf B holomorphe Funktion ist. Wegen $h^{(m)}(c) \neq 0$ ist auch $h_m(c) \neq 0$, und aus Stetigkeitsgründen ist dann $h_m(z) \neq 0$ für alle z aus einer Umgebung $U \subset B$ von c. Die Funktion h hat also *keine* Nullstellen in $U \backslash \{c\}$, d.h. c kann kein Häufungspunkt von M sein. $\lightning$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $h := f - g$ und $S_k := \{z \in G : h^{(k)}(z) = 0\}$. Da $h^{(k)}$ stetig ist, ist jede Menge S_k abgeschlossen in G, und daher ist auch $S := \bigcap_k S_k$ abgeschlossen in G. Andererseits ist S offen in G: Ist nämlich $z \in S$, so können wir h in einer Umgebung U von z in eine Potenzreihe um z entwickeln, welche dann die Nullreihe ist. Also gilt $U \subseteq S$.

Da G zusammenhängend ist, sind die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von G die Mengen $\emptyset$ und G. Wegen $c \in S$ ist S nicht leer und daher $S = G$. ■

Folgerung 3.2 *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein das Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umfassendes Gebiet und f eine Funktion auf I, so gibt es* höchstens eine *auf G holomorphe Funktion F, die auf I mit f übereinstimmt.*

Man kann also z.B. die reelle Sinusfunktion nur auf eine einzige Weise zu einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen. Mit dem Identitätssatz lassen sich auch „analytische Identitäten“ fortsetzen (*„Permanenzprinzip“*). Angenommen, wir haben e^z als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, wissen aber nur für alle *reellen* z, w, dass $e^{w+z} = e^w e^z$. Für ein fixiertes $w \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen $f(z) := e^{w+z}$ und $g(z) := e^w e^z$ auf $\mathbb{C}$. Diese sind holomorph auf $\mathbb{C}$ und stimmen auf $\mathbb{R}$ überein. Also stimmen sie auf $\mathbb{C}$ überein: $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Wiederholen wir diese Überlegung mit fixiertem $z \in \mathbb{C}$, erhalten wir die Gültigkeit von $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. ∎

3.2 Der Satz von Liouville

Zur Erinnerung: eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganze Funktion.*

Satz 3.3 (Satz von Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis Sei f ganze Funktion mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter sei $c \in \mathbb{C}$ und B_R eine Kreisscheibe um c mit Radius R. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f'(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^2} \, d\zeta \,,$$

und das Integral läßt sich wie folgt abschätzen:

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \,.$$

Lassen wir in dieser Abschätzung $R \to \infty$ laufen, folgt $f'(c) = 0$. Da c beliebig war, ist f' überall 0 und daher f eine Konstante. ∎

Satz 3.4 (Verallgemeinerter Satz von Liouville) *Gilt für eine ganze Funktion f die Abschätzung $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq R_0$, so ist f ein Polynom höchstens n-ten Grades.*

Beweis Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion. Die Aussage für $n = 0$ ist der Satz von Liouville. Wir nehmen an, die Aussage des Satzes sei für $n - 1$ richtig, und es sei f eine Funktion wie im Satz formuliert.

Nach dem Fortsetzungssatz von Riemann ist

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

eine ganze Funktion, und für alle $|z| \geq \max\{1, R_0\}$ gilt die Abschätzung

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} \leq \frac{M\,|z|^n + |f(0)|\,|z|^n}{|z|} = (M + |f(0)|)\,|z|^{n-1} \,.$$

Nach Induktionsannahme ist $\tilde{f}$ Polynom vom Grad $\leq n-1$. Also ist $f(z) = f(0) + z\tilde{f}(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. ∎

Wir überlegen uns nun, wie der Satz von Liouville zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benutzt werden kann. Dazu benötigen wir Aussagen über das Verhalten von Polynomen im Unendlichen.

Lemma 3.5 *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $G > 0$ ein $R > 0$ so, dass $|P(z)| \geq G$ für alle $|z| \geq R$.*

Beweis Mit der Dreiecksungleichung ist

$$|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k.$$

Für $|z| \geq 1$ und mit $m := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ folgt hieraus

$$|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^{n-1} = |a_n|\,|z|^n - m|z|^{n-1} = |a_n|\,|z|^n\,(1 - \frac{m}{|a_n|\,|z|})\,.$$

Für $|z| \geq \max\{1, \frac{2m}{|a_n|}\}$ erhält man weiter

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}\,|a_n|\,|z|^n.$$

Wählt man schließlich $R = \max\{1, \frac{2m}{|a_n|}, \sqrt[n]{\frac{2G}{|a_n|}}\}$, so ist für alle $|z| \geq R$ tatsächlich $|P(z)| \geq G$. ∎

Satz 3.6 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis Sei P Polynom vom Grad $n \geq 1$ ohne komplexe Nullstellen. Dann ist $1/P$ eine ganze Funktion, und wegen $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$ (mit einem geeignet gewähltem $R > 0$) ist $|1/P(z)| \leq 1$ für alle $|z| \geq R$. Die ganze Funktion $1/P$ ist also beschränkt und somit nach Liouville eine Konstante. Dies steht im Widerspruch zu $n \geq 1$. ∎

Wie man aus der Algebra weiß, folgt nun leicht, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n komplexe Nullstellen besitzt (gezählt unter Beachtung ihrer Vielfachheit), und dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ eindeutig in n Linearfaktoren zerlegt werden kann:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{r=1}^{n} (z - z_r)\,,$$

wobei z_r die Nullstellen von P sind.

3.3 Das Maximumprinzip

Als einfache Konsequenz der Cauchyschen Integralformel vermerken wir zunächst die *Mittelwertungleichung* für holomorphe Funktionen. Sei D offen, $B := \{z : |z-c| \leq R\} \subset D$ und f holomorph auf D. Dann ist

$$|f(c)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - c}\,d\zeta\Big| \leq \frac{2\pi R}{2\pi}\,\frac{\sup|f(\zeta)|}{R} = \sup_{\zeta\in\partial B}|f(\zeta)|\,. \tag{3.1}$$

Unser Beweis des Maximumprinzips beruht auf einer weiteren bemerkenswerten Eigenschaft holomorpher Funktionen. Allgemein heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen *offen*, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U in Y offen ist (im Gegensatz dazu bedeutet Stetigkeit, dass das Urbild $f^{-1}(W)$ jeder in Y offenen Menge W in X offen ist).

Satz 3.7 (Offenheitssatz) *Sei D Gebiet und f holomorph auf D und nicht konstant. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$ offen.*

Beweis Sei $U \subseteq D$ offen und $c \in U$. Wir müssen zeigen, dass $f(U)$ eine Kreisscheibe um $f(c)$ enthält.

Da f nicht konstant ist, gibt es eine Kreisscheibe B um c mit $\overline{B} \subset U$, so dass $f(c) \notin f(\partial B)$ (Identitätssatz). Für dieses B ist also

$$2\delta := \min_{z\in\partial B}|f(z) - f(c)| > 0\,. \tag{3.2}$$

Wir zeigen nun genauer, dass die Kreisscheibe $B_\delta\big(f(c)\big) := \{w \in \mathbb{C} : |f(c) - w| < \delta\}$ zu $f(U)$ gehört. Wir müssen also zeigen, dass es für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $|f(c) - w| < \delta$ ein $\hat{z} \in U$ so gibt, dass $f(\hat{z}) = w$. Angenommen, es gibt ein w mit dieser Eigenschaft, für das kein solches $\hat{z}$ existiert. Dann ist $f(z) - w \neq 0$ auf U, und damit ist die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$ holomorph auf U. Für alle $z \in \partial B$ gilt aber

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(c)| - |f(c) - w| \overset{(3.2)}{>} \delta\,, \tag{3.3}$$

und die Mittelwertungleichung (3.1) auf ∂B liefert

$$\frac{1}{|f(c)-w|} \overset{(3.1)}{\leq} \max_{z\in\partial B}\frac{1}{|f(z)-w|} \overset{(3.3)}{<} \frac{1}{\delta} < \frac{1}{|f(c)-w|}\,. \;\lightning \qquad \blacksquare$$

Folgerung 3.8 *Holomorphe Funktionen mit konstantem Real- oder Imaginärteil oder mit konstantem Betrag sind konstant.*

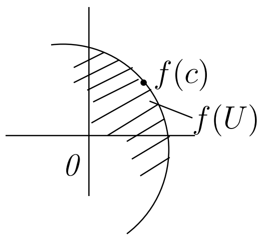
Folgerung 3.9 (Gebietstreue) *Nichtkonstante holomorphe Funktionen bilden Gebiete auf Gebiete ab.*

Denn: wegen Holomorphie werden offene Mengen auf offene Mengen abgebildet, und wegen der Stetigkeit zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende.

Als wohl wichtigste Folgerung erhalten wir

Satz 3.10 (Maximumprinzip) *Sei G ein Gebiet, und f sei eine auf G holomorphe Funktion, die in G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt. Dann ist f konstant.*

Beweis Sei $c \in G$ und $U \subseteq G$ Umgebung von c mit $|f(z)| \leq |f(c)|$ für alle $z \in U$. Dann gilt $f(U) \subseteq \{w : |w| \leq |f(c)|\}$, d.h. $f(U)$ ist keine offene Umgebung von $f(c)$. Nach dem Offenheitssatz ist f konstant. ∎



Insbesondere gilt:

Satz 3.11 (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete) *Das Gebiet G sei beschränkt, und f sei eine auf $\overline{G}$ stetige und in G holomorphe und nichtkonstante Funktion. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum nur auf dem Rand von G an:*

$$|f(z)| < \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \textit{für alle } z \in G\,.$$

Der Beweis ist klar: Als stetige Funktion muss $|f|$ auf $\overline{G}$ sein Maximum annehmen. Lokale Maxima im Inneren gibt es jedoch nicht, da f nicht konstant ist. ∎

Mit Hilfe des Maximumprinzips zeigen wir noch eine Aussage, die benötigt wird, wenn man z.B. diejenigen holomorphen Funktionen charakterisieren will, die die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oder die obere Halbebene auf sich selbst abbilden.

Lemma 3.12 (Schwarzsches Lemma) *Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann ist entweder*

$$f(z) = e^{i\theta} z \quad \textit{mit einem } \theta \in \mathbb{R} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{D}\,,$$

oder es ist

$$|f'(0)| < 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| < |z| \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}\,.$$

Beweis Wir haben bereits mehrfach benutzt, dass die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \in \mathbb{D}\backslash\{0\} \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{D}$ holomorph ist. Für jedes feste $r \in (0,1)$ ist

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \le \frac{1}{r}\,,$$

woraus mit dem Maximumprinzip folgt

$$|g(z)| \le \frac{1}{r} \quad \text{für alle } |z| \le r\,.$$

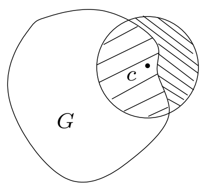
Lassen wir $r \to 1$ streben, folgt $|g(z)| \le 1$ für alle $|z| < 1$ und somit

$$|f(z)| \le |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| = |g(0)| \le 1\,.$$

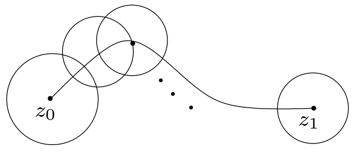
Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ ist, so ist $|g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$, d.h. g nimmt das Betragsmaximum im Inneren des Kreises $\mathbb{D}$ an. Nach dem Maximumprinzip ist g in diesem Fall eine Konstante vom Betrag 1, d.h. $g(z) = e^{i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$. ∎

3.4 Das Prinzip der analytischen Fortsetzung

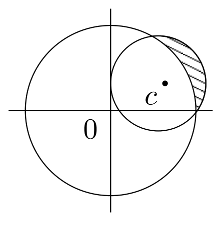
Sei G ein Gebiet und f holomorph auf G. Entwickelt man f um einen Punkt $c \in G$ in eine Potenzreihe, so konvergiert diese im größten in G enthaltenen Kreis um c. Der Konvergenzradius der Potenzreihe kann aber größer sein als der Abstand von c zu ∂G. In diesem Fall kann man die Potenzreihe benutzen, um f auf einem größeren Gebiet zu definieren bzw. um f über G hinaus *analytisch* oder holomorph *fortzusetzen*.



Dieses Prinzip wird häufig mehrfach angewandt, um eine in einer Umgebung eines Punktes z_0 definierte holomorphe Funktion längs einer Kurve Γ bis zu einem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ fortzusetzen („Kreiskettenverfahren“).



Beispiel 1 Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist auf $\mathbb{D}$ holomorph. Ihre Potenzreihenentwicklung um den Punkt $c \in \mathbb{D}$ lautet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(1-c)^{n+1}}$ (beachte: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$). Der Konvergenzradius ist offenbar gleich $|1-c|$. Für $|1-c| > 1-|c|$ hat man also eine echte Fortsetzung. Natürlich ist in diesem Beispiel die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ die größtmögliche analytische Fortsetzung. ∎



Beispiel 2 Die Funktion $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ist in $\mathbb{D}$ holomorph (warum?), läßt sich aber auf keine Weise über den Rand von $\mathbb{D}$ hinaus analytisch fortsetzen. Wäre sie fortsetzbar, so müsste f ja wenigstens auf ein Stück von $\partial\mathbb{D}$ stetig fortsetzbar sein. Wir überlegen uns, dass dies nicht zutrifft.

Dazu schreiben wir $z \in \mathbb{D}$ als $z = \rho e^{2\pi i\alpha}$ mit $0 \leq \rho < 1$ und $\alpha \in [0, 1)$. Für rationales α, d.h. $\alpha = p/q$, und $n \geq q$ ist $n!\alpha = n!p/q \in \mathbb{N}$ und daher

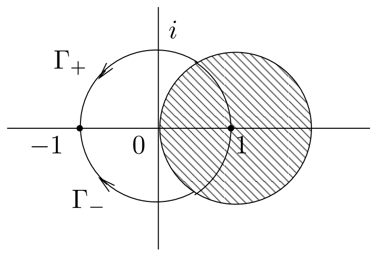
$$z^{n!} = \rho^{n!} e^{2\pi i\alpha n!} = \rho^{n!}\,.$$

Somit ist

$$f(\rho e^{2\pi i\alpha}) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}\,.$$

Der erste Summand ist beschränkt durch q, der zweite Summand wächst für $\rho \nearrow 1$ jedoch über alle Schranken. Also wächst auch $|f(\rho e^{2\pi i\alpha})|$ für ein fixiertes α und $\rho \nearrow 1$ über alle Schranken. Da die Punkte $e^{2\pi i\alpha}$ mit rationalem α auf $\partial\mathbb{D}$ dicht liegen, folgt die Behauptung. ■

Beispiel 3 Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(z-1)^n$ konvergiert auf $\{z : \ |z-1| < 1\}$ und stellt dort die Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ dar (genauer: auf $\{z : |z-1| < 1\} \cap \mathbb{R}$). Diese Funktion kann man sowohl entlang Γ_+ als auch entlang Γ_- zum Punkt -1 analytisch fortsetzen. Die erhaltenen Fortsetzungen stimmen jedoch nicht überein: Man erhält einmal $+i$ und einmal $-i$ als Wert der fortgesetzen Funktion im Punkt -1! ■



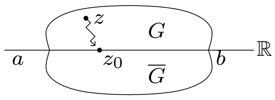
Beispiel 4 Die Reihe $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert für Re $z > 1$ und definiert auf $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1\}$ eine holomorphe Funktion. Diese kann holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortgesetzt werden. Gemäß der Riemannschen Vermutung liegen alle nichttrivialen Nullstellen von ζ auf der Geraden Re $z = \frac{1}{2}$.

Der folgende Satz gibt Bedingungen dafür an, dass die Fortsetzung eindeutig bestimmt ist. Ein Beweis steht in Behnke/Sommer, III.1, Satz 3.

Satz 3.13 (Monodromiesatz) *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, und $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ sei in einer Umgebung $U \subseteq G$ von z_0 konvergent. Wenn sich f von z_0 aus entlang* jeder *stückweise glatten doppelpunktfreien Kurve analytisch fortsetzen läßt, so erzeugt diese Fortsetzung eine eindeutig bestimmte Funktion.*

Abschließend geben wir ein Fortsetzungsresultat an, welches insbesondere beim Übergang vom Reellen ins Komplexe interessant ist.

Satz 3.14 (Spiegelungssatz von Schwarz) *Sei G ein Gebiet in der oberen Halbebene, dessen Rand ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ enthält.*



Die Funktion f sei auf G holomorph, für jedes $z_0 \in (a,b)$ sollen die Grenzwerte

$$h_0(z_0) := \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in G}} f(z)$$

existieren und reell sein, und die Funktion

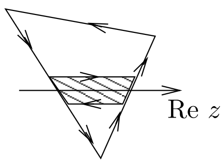
$$h(z) := \begin{cases} f(z) & z \in G \\ h_0(z) & z \in (a,b) \end{cases}$$

sei auf $G \cup (a,b)$ stetig. Weiter sei $\overline{G}$ das an $\mathbb{R}$ gespiegelte Gebiet G. Dann ist die Funktion

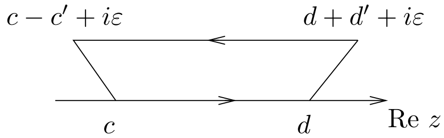
$$H(z) := \begin{cases} h(z) & z \in G \cup (a,b) \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in \overline{G} \end{cases}$$

holomorph auf $G \cup (a,b) \cup \overline{G}$ (f wird also durch „Spiegelung" fortgesetzt).

Beweis Die Funktion H ist holomorph auf $\overline{G}$. Ist nämlich $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 \in G$, so ist $\overline{f(\overline{z})} = \sum \overline{a}_n (z - \overline{z}_0)^n$ eine Potenzreihenentwicklung von H um $\overline{z}_0 \in \overline{G}$ mit gleichem Konvergenzradius. Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir die Aussage mit dem Satz von Morera in der Formulierung aus der Übung.



Dazu müssen wir zeigen, dass das Integral über H entlang jedes Dreiecks D in $G \cup (a,b) \cup \overline{G}$ verschwindet. Da H in G und in $\overline{G}$ holomorph ist, verschwindet das Integral über jedem konvexen n–Eck, das komplett in G oder $\overline{G}$ liegt (Cauchyscher Integralsatz). Das übrig bleibende (schraffierte) Trapez zerlegen wir in zwei Trapeze, so dass jedes von ihnen mit einer der parallelen Seiten auf der reellen Achse liegt.



Dabei lassen wir zu, dass diese Seite zu einem Punkt zusammenschrumpft. Wir überlegen uns, dass das Integral über H entlang eines solchen Trapezes beliebig klein wird, wenn wir ε beliebig klein wählen. Die Ecken des Trapezes bezeichnen wir mit $c, d, d+d'+i\varepsilon$ und $c-c'+i\varepsilon$ mit $c, d, c', d' \in \mathbb{R}$, und wir beachten, dass die Richtung der beiden Schenkel des Trapezes durch das Ausgangsdreieck festgelegt wird. Mit ε werden also auch c' und d' beliebig klein. Für diese Schenkel ist nun klar, dass

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{c-c'+i\varepsilon}^{c} h(z)dz\Big| &\leq |i\varepsilon - c'|\,\|h\|_\infty \leq C\varepsilon\|h\|_\infty, \\
\Big|\int_{d}^{d+d'+i\varepsilon} h(z)dz\Big| &\leq C\varepsilon\,\|h\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Für die Summe der Integrale über die Längsseiten finden wir

$$\begin{aligned}
\Big|\int_c^d h(z)dz + \int_{d+d'+i\varepsilon}^{c-c'+i\varepsilon} h(z)dz\Big| &= \Big|\int_c^d h(z)dz - \int_{c-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z)dz\Big| \\
&= \Big|\int_c^d h(z)dz - \int_{c-c'+i\varepsilon}^{d-c'+i\varepsilon} h(z)dz - \int_{d-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z)dz\Big| \\
&\leq \Big|\int_c^d \big(h(z) - h(z-c'+i\varepsilon)\big)dz\Big| + \Big|\int_{d-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z)dz\Big| \\
&\leq |d-c| \sup_{z\in[c,d]} |h(z) - h(z-c'+i\varepsilon)| + |d'+c'|\,\|h\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von h wird dies beliebig klein, wenn ε klein genug ist. ■

3.5 Biholomorphe und konforme Abbildungen

In diesem Abschnitt sehen wir uns holomorphe Funktionen unter geometrischen Gesichtspunkten an.

Definition 3.15 *Seien $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to D'$ heißt* biholomorph*, wenn sie D bijektiv auf D' abbildet und wenn sowohl f als auch die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : D' \to D$ holomorph sind.*

Biholomorphe Funktionen sind *winkeltreu* (dies werden wir später genauer formulieren und beweisen). Aus diesem Grund interessiert man sich besonders für die Frage, ob zwei offene Mengen D, D' *biholomorph äquivalent* sind, d.h. ob es eine biholomorphe Funktion $f : D \to D'$ gibt. Wir werden uns dieser Frage im Kapitel 5 zuwenden. Die biholomorphen Abbildungen einer offenen Menge D auf sich bilden eine Gruppe, die sog. *Automorphismengruppe* Aut D von D. Die explizite Beschreibung dieser Gruppen ist eine weitere zentrale Aufgabe der Riemannschen Funktionentheorie. Für $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wird Aut D in der Übung identifiziert.

Satz 3.16 (Biholomorphiekriterium) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $D' := f(D)$ offen und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Weiter ist dann $f : D \to D'$ biholomorph, und für die Umkehrabbildung $f^{(-1)} : D' \to D$ gilt*

$$(f^{(-1)})'(w) = 1/f'\big(f^{(-1)}(w)\big) \quad \forall w \in D'\,.$$

Beweis Wegen der Injektivität ist f nirgends lokal konstant. Nach dem Offenheitssatz ist $D' = f(D)$ offen. Der gleiche Satz zeigt, daß für jede in D offene Menge U ihr $f^{(-1)}$–Urbild $(f^{(-1)})^{(-1)}(U) = f(U)$ in D' offen ist. Folglich ist $f^{(-1)} : D' \to D$ eine stetige Funktion.

Die Injektivität von f liefert weiter, daß die Ableitung f' nirgends lokal identisch 0 ist. Nach dem Identitätssatz muss daher die Menge $N(f')$ der Nullstellen von f' diskret (d.h. für jedes $z \in N(f')$ gibt es eine Umgebung, die keinen weiteren Punkt aus $N(f')$ enthält) und abgeschlossen (Stetigkeit von f') sein. Da f ein Homöomorphismus ist, ist die Menge $M := f\big(N(f')\big)$ ebenfalls diskret und abgeschlossen in D'.

Wie im Beweis der Kettenregel macht man sich nun klar, dass $f^{(-1)}$ auf $D'\backslash M$ holomorph ist und dass für alle $d \in D'\backslash M$ gilt

$$(f^{(-1)})'(d) \cdot f'\big(f^{(-1)}(d)\big) = 1 \quad \text{bzw.} \quad (f^{(-1)})'(d) = 1/f'\big(f^{(-1)}(d)\big)\,. \tag{3.4}$$

Da außerdem $f^{(-1)}$ auf ganz D' stetig ist, folgt mit dem Riemannschen Fortsetzungssatz (den wir in Abschnitt 2.4 nur für den Fall formuliert haben, dass überall mit Ausnahme eines einzigen Punktes Holomorphie vorliegt, und den wir hier in einer leicht verallgemeinerten Version benötigen), dass $f^{(-1)}$ auf ganz D' holomorph ist. Aus der Stetigkeit von $f^{(-1)}$ und $(f^{(-1)})'$ folgt dann, dass die linke Formel von (3.4) für alle $d \in D'$ gilt. Insbesondere ist also $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. ■

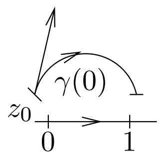
Definition 3.17 *Sei D offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt* lokal biholomorph *auf D, wenn es für jeden Punkt $z \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ von z gibt, so dass $f|_U : U \to f(U)$ biholomorph ist.*

Das folgende Kriterium für lokale Biholomorphie haben Sie im Wesentlichen bereits in der Übung (Aufgabe G8) und im Biholomorphiekriterium bewiesen.

Satz 3.18 (Kriterium für lokale Biholomorphie) *Sei D offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f genau dann lokal biholomorph auf D, wenn $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Wir wollen nun den angekündigten Zusammenhang zwischen (Bi-)Holomorphie und Winkeltreue herstellen. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten wir glatte Wege mit z_0 als

Anfangspunkt, d.h. stetig differenzierbare Abbildungen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$.



Die *Halbtangente* an γ in z_0 ist der Strahl $\{z_0 + s\gamma'(0) : \ s \geq 0\}$. Sind γ und μ zwei derartige Wege (also mit gemeinsamem Anfangspunkt z_0), so definieren wir den *orientierten Winkel* zwischen γ und μ in z_0 durch

$$\sphericalangle\,(\gamma,\mu) = \arg\frac{\mu'(0)}{\gamma'(0)}\,.$$

Auf die Wahl des Argumentes der komplexen Zahl $\mu'(0)/\gamma'(0)$ kommt es dabei nicht an; orientierte Winkel sind also nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Wir wollen nun Abbildungen untersuchen, bei denen diese Winkel erhalten bleiben. Damit wir nach Ausführung der Abbildung überhaupt wieder Winkel definieren können, lassen wir nur Abbildungen zu, die glatte Kurven γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ wieder auf solche Kurven abbilden.

Sei also $f = u + iv$ eine Abbildung, die auf einer Umgebung U von z_0 reell stetig differenzierbar ist und für die

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt von U invertierbar ist (es genügt auch die Invertierbarkeit von Df an der Stelle z_0; ist U klein genug, so folgt wegen der Stetigkeit von u_x, u_y, v_x, v_y die Invertierbarkeit auf ganz U). Für jede solche Abbildung f und jeden wie oben beschriebenen Weg $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ist nach der Kettenregel

$$(f\circ\gamma)'(0) = \begin{pmatrix} u_x\big(\gamma(0)\big) & u_y\big(\gamma(0)\big) \\ v_x\big(\gamma(0)\big) & v_y\big(\gamma(0)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{pmatrix}.$$

Ausrechnen und geeignetes Zusammenfassen liefern

$$\begin{aligned}
(f\circ\gamma)'(0) &= \begin{pmatrix} u_x(z_0)\gamma_1'(0) & + & u_y(z_0)\gamma_2'(0) \\ v_x(z_0)\gamma_1'(0) & + & v_y(z_0)\gamma_2'(0) \end{pmatrix} \\
&= u_x(z_0)\gamma_1'(0) + u_y(z_0)\gamma_2'(0) + iv_x(z_0)\gamma_1'(0) + iv_y(z_0)\gamma_2'(0) \\
&= \frac{1}{2}\big(u_x(z_0) + iv_x(z_0) - iu_y(z_0) + v_y(z_0)\big)\,\big(\gamma_1'(0) + i\gamma_2'(0)\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(u_x(z_0) + iv_x(z_0) + iu_y(z_0) - v_y(z_0)\big)\,\big(\gamma_1'(0) - i\gamma_2'(0)\big)\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ist nun f holomorph in U, so gelten in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, und der Ausdruck (3.5) vereinfacht sich zu

$$(f \circ \gamma)'(0) = \big(u_x(z_0) + iv_x(z_0)\big)\, \gamma'(0) = f'(z_0)\, \gamma'(0)\,,$$

wobei $f'(z_0) \neq 0$, da nach Voraussetzung

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2\,.$$

Für holomorphes f gilt also

$$\sphericalangle\,(f \circ \gamma,\ f \circ \mu) = \arg \frac{(f \circ \mu)'(0)}{(f \circ \gamma)'(0)} = \arg \frac{f'(z_0)\mu'(0)}{f'(z_0)\gamma'(0)} = \sphericalangle\,(\gamma, \mu)\,,$$

d.h. orientierte Winkel bleiben erhalten. Sei nun umgekehrt f eine Abbildung wie oben beschrieben, welche orientierte Winkel erhält. Dann erhält f insbesondere die Winkel zwischen allen Wegen $\gamma_\alpha :\ [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + e^{i\alpha} t$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Es ist also für jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \alpha \quad &= \quad \arg \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\cdot 0}} = \arg \frac{\gamma_\alpha'(0)}{\gamma_0'(0)} = \sphericalangle\,(\gamma_0, \gamma_\alpha) = \sphericalangle\,(f \circ \gamma_0,\ f \circ \gamma_\alpha) \\ &\overset{(3.5)}{=} \quad \arg \frac{(u_x + iv_x - iu_y + v_y)e^{i\alpha} + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)e^{-i\alpha}}{(u_x + iv_x - iu_y + v_y) + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)} \qquad (= \arg e^{i\alpha}) \end{aligned}$$

mit $u_x := u_x(z_0)$ usw. Hieraus folgt, dass

$$(u_x + iv_x - iu_y + v_y) + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)e^{-2i\alpha}$$

ein von α unabhängiges Argument besitzen muss. Dies ist nur möglich, wenn $u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$, d.h. wenn (vergleiche Real- u. Imaginärteile)

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad \text{und} \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0)\,.$$

Das sind aber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; f ist also in z_0 komplex differenzierbar.

Definition 3.19 *Sei $D \subseteq C$ offen. Eine reell stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit auf D invertierbarer Ableitung heißt* lokal konform*, wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in D$ die orientierten Winkel erhält. f heißt* konform*, wenn f lokal konform ist und D bijektiv auf $f(D)$ abbildet.*

Mit diesen Begriffen lassen sich die erzielten Resultate wie folgt zusammenfassen.

Satz 3.20 *Seien D und f wie in Definition 3.19. Die Funktion f ist genau dann lokal konform, wenn sie lokal biholomorph ist, und f ist konform genau dann, wenn f biholomorph ist.*