2 Der Cauchysche Integralsatz

2.1 Komplexe Kurvenintegrale

In allen Anwendungen werden wir nur über Kurven integrieren, die sich aus Stücken von Kreisen und Geraden zusammensetzen. Wir definieren komplexe Kurvenintegrale daher nur über stückweise glatten Wegen. Eine Übertragung auf beliebige rektifizierbare Wege ist in den meisten Fällen möglich.

Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung γ von einem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ in die komplexe Ebene $\mathbb{C}$. Der Weg γ heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist (im üblichen „reellen“ Sinn), d.h. ist $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so sollen die beiden Funktionen $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sein. Die Ableitung $\gamma'(t)$ ist dann die komplexe Zahl $\alpha'(t) + i\beta'(t)$ oder das Paar $\big(\alpha'(t), \beta'(t)\big) \in \mathbb{R}^2$. Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es Punkte $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so gibt, dass die Einschränkung von γ auf jedes Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ einen stetig differenzierbaren Weg ergibt. Im Weiteren sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, $\Gamma := \gamma([a,b])$ die durch γ beschriebene Kurve und $f = u + iv : \Gamma \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Definition 2.1 *Seien $\alpha, \beta, \gamma, f, u, v$ wie soeben beschrieben. Dann definieren wir das komplexe Wegintegral von f entlang γ durch*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma (u d\alpha - v d\beta) + i \int_\gamma (v d\alpha + u d\beta)$$

(die Existenz der Wegintegrale auf der rechten Seite ist uns aus der reellen Analysis bekannt).

Ist γ sogar stetig differenzierbar, so gilt natürlich

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b \big(u(\gamma(t))\alpha'(t) - v\big(\gamma(t)\big)\beta'(t)\big)dt \\ &\quad + i \int_a^b \big(v(\gamma(t))\alpha'(t) + u\big(\gamma(t)\big)\beta'(t)\big)dt\,. \end{aligned}$$

Vereinbaren wir folgende Definition für das Integral über eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\int_a^b g(t)dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g)(t)dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} g)(t)dt\,, \tag{2.1}$$

so erhalten wir weiter

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \big(u(\gamma(t))\alpha'(t) - v\big(\gamma(t)\big)\beta'(t) + iv\big(\gamma(t)\big)\alpha'(t) + iu\big(\gamma(t)\big)\beta'(t)\big)\, dt\,.$$

Nun ist aber, wie man durch Ausmultiplizieren leicht nachrechnet, der Integrand dieses Integrals gleich

$$\Big(u\big(\gamma(t)\big) + iv\big(\gamma(t)\big)\Big) \cdot \big(\alpha'(t) + i\beta'(t)\big) = f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,,$$

und wir gelangen zur äquivalenten

Definition 2.2 *Seien f, γ wie oben und γ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt\,,$$

wobei das rechte Integral im Sinne von (2.1) *zu verstehen ist.*

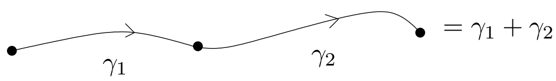
Eigenschaften von Wegintegralen

(*a*) $\int_\gamma f(z)dz$ kann auch über Riemannsummen erklärt werden.

(*b*) $\int_\gamma f(z)dz$ hängt nur von der Kurve Γ und deren Orientierung, nicht aber von der Parametrisierung γ ab.

(*c*) $\int_\gamma (f+g)(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$

(*d*) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$



(*e*) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

(*f*) $\big|\int_\gamma f(z)dz\big| \le L(\gamma)\, \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\,.$

(*g*) Sei $g : \hat{D} \to D$ holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung, $\hat\gamma : [a,b] \to \hat{D}$ stetig differenzierbarer Weg, $\gamma := g \circ \hat\gamma$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\hat\gamma} f\big(g(\zeta)\big)g'(\zeta)d\zeta\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz = \int_{g\circ\hat\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f\big(g(\hat\gamma(t))\big)\,g'\big(\hat\gamma(t)\big)\hat\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_{\hat\gamma} f\big(g(\zeta)\big)g'(\zeta)\,d\zeta\,.\end{aligned}$$ ■

(h) Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und Γ die zugehörige Kurve. Weiter seien f_n stetige Funktionen auf Γ, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf Γ konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz\,.$$

Beweis: Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen f_n ist f stetig; daher existiert $\int_\gamma f(z)dz$. Wegen (c) und (f) gilt:

$$\Big|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\Big| \leq L(\gamma)\,\|f_n - f\|_\infty \to 0\,. \qquad \blacksquare$$

Durch Betrachten der Partialsummenfolge erhält man ein analoges Vertauschungsresultat für gleichmäßig konvergente Reihen.

(i) Eine holomorphe Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn $F' = f$. Ist f stetig, $\gamma : [a,b] \to D$ stetig differenzierbar und F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,.$$

Beweis:

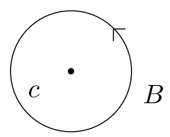
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\,dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Wir berechnen nun einige der für die Funktionentheorie wichtigsten Integrale.

Beispiel 1 Sei B der Kreis mit Mittelpunkt c und Radius $r > 0$, und wir durchlaufen den Rand von B im Gegenuhrzeigersinn. Dann gilt

$$\int_{\partial B} (z-c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1\,. \end{cases}$$

Der Rand von B ist die durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto c + re^{it}$ beschriebene Kurve. Wegen $\gamma'(t) = rie^{it}$ ist



$$\int_{\partial B} (z-c)^n dz = \int_\gamma (z-c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n\, ire^{it}\,dt = r^{n+1}\int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t}\,dt\,.$$

Für $n = -1$ ist dieses Integral gleich $2\pi i$. Für $n \neq -1$ ist $F(t) := \frac{1}{n+1}\,e^{i(n+1)t}$ eine Stammfunktion von $f(t) := ie^{i(n+1)t}$, und daher ist

$$\int_{\partial B} (z-c)^n dz = r^{n+1}F(2\pi) - r^{n+1}F(0) = 0\,. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 2 Sei wieder $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < r\}$ und ∂B wie in Beispiel 1 orientiert. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in B \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B}. \end{cases}$$

Ein Vorgehen wie in Beispiel 1 ist wenig aussichtsreich. Durch einen Trick reduzieren wir das Problem auf den Fall $z = c$. Sei zunächst $z \in B$, d.h. $|z-c| < r$. Wir setzen $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ mit $\zeta \in \partial B$ und erhalten wegen $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c - (z-c)} = \frac{1}{\zeta - c}\,\frac{1}{1-w} = \frac{1}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

(geometrische Reihe).

Da für alle $\zeta \in \partial B$ gilt $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^n$ eine absolut konvergente Majorante für $\sum w^n$. Diese Reihe konvergiert also gleichmäßig auf ∂B. Mit Eigenschaft (h) erhalten wir für alle z mit $|z-c| < r$:

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-c)^n \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta-c)^{n+1}}\,,$$

und dies ist gleich $2\pi i$ nach Beispiel 1.

Für z mit $|z-c| > r$ schreiben wir $\frac{1}{\zeta - z}$ als $\frac{-1}{z-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^n$ und erhalten

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-c)^{n+1}} \int_{\partial B} (\zeta - c)^n\, d\zeta = 0\,. \qquad \blacksquare$$

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

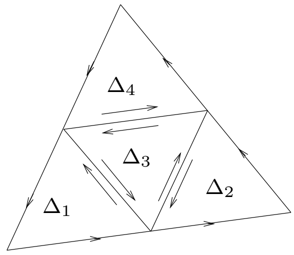
Der Cauchysche Integralsatz (in einer seiner Fassungen) besagt, dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f und jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren (oder wenigstens rektifizierbaren) Weg γ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D. Wenn wir wüssten, dass f eine Stammfunktion besitzt oder dass die Funktionen u_x, u_y, v_x, v_y stetig sind, würde der Cauchysche Integralsatz unmittelbar aus den bekannten Sätzen für reelle Wegintegrale folgen. Wir wollen den Satz ohne diese Zusatzvoraussetzungen beweisen und müssen daher etwas weiter ausholen. Allerdings werden wir den Cauchyschen Integralsatz nur in einer seiner einfachsten (für viele Anwendungen ausreichenden) Formulierungen beweisen. Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis ist das

Lemma 2.3 (Integrallemma von Goursat) *Sei $D \neq 0$ offen und f holomorph auf D. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0\,.$$

Mit anderen Worten: Der Integralsatz gilt für Dreiecksränder.

Beweis Für jedes Dreieck Δ bezeichnen wir mit $L(\partial\Delta)$ seinen Umfang, und wir setzen $a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)dz$. Durch Seitenhalbierung teilen wir das Ausgangsdreieck Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$.



Wegen Eigenschaften (d) und (e) ist dann

$$a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} a(\Delta_j)\,.$$

Unter den 4 Integralen $a(\Delta_j)$ wählen wir ein betragsgrößtes aus. Das zugehörige Dreieck bezeichnen wir mit Δ^1. Dann gilt also

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|\,, \quad L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2}\,L(\partial\Delta)\,.$$

Dieses Verfahren wiederholen wir für Δ^1 und erhalten ein Dreieck Δ^2. So fortfahrend entsteht eine Folge $\Delta \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$ abgeschlossener Dreiecke mit

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|\,, \quad L(\partial\Delta^n) = 2^{-n} L(\partial\Delta)\,. \tag{2.2}$$

Nach dem Intervallschachtelungssatz besteht $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$ aus genau einem Punkt c. Da f holomorph in D ist und $c \in \Delta$ zu D gehört, gibt es eine auf D stetige Funktion mit $g(c) = 0$, so dass

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + (z-c)\,g(z) \quad \text{für alle } z \in D \tag{2.3}$$

(Zerlegungssatz an der Stelle c). Die speziellen Funktionen $z \mapsto f(c)$ und $z \mapsto f'(c)(z-c)$ besitzen aber trivialerweise Stammfunktionen. Daher gilt

$$\int_{\partial\Delta^n} f(c)dz = 0\,, \quad \int_{\partial\Delta^n} f'(c)(z-c)dz = 0\,, \quad n \geq 1\,,$$

und aus (2.3) folgt durch Integration über $\partial\Delta^n$

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z-c)\,g(z)\,dz\,, \quad n \geq 1\,.$$

Mit der Abschätzung (f) und mit (2.2) erhalten wir

$$|a(\Delta^n)| \leq L(\partial\Delta^n) \sup_{z\in\partial\Delta^n} |(z-c)g(z)| \leq L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)}$$

und

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)} = L(\partial\Delta)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)}\,.$$

Wegen $g(c) = 0$ und der Stetigkeit von g findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n_0 so, dass $\|g\|_{C(\partial\Delta^n)} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes feste $\varepsilon > 0$ ist daher

$$|a(\Delta)| \leq \varepsilon\, L(\partial\Delta)^2\,,$$

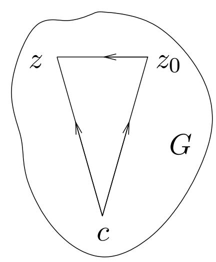
und da ε beliebig ist, folgt $|a(\Delta)| = 0$. ∎

Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Sterngebiet mit Zentrum* c, falls für jeden Punkt $z \in D$ die Verbindungsstrecke $[c, z]$ komplett in D liegt.

Satz 2.4 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete) *Sei G Sterngebiet mit Zentrum c und f holomorph in G. Dann ist $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ eine Stammfunktion für f auf G; und insbesondere gilt für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Beweis Wegen $[c, z] \subset G$ ist die Funktion F korrekt definiert. Für den Beweis des Satzes genügt es zu zeigen, dass F Stammfunktion von f ist, d.h. dass F in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar und $F'(z_0) = f(z_0)$ ist. Sei $z \in G$ so nahe an z_0, dass auch die Strecke $[z_0, z]$ noch ganz in G liegt. Nach dem Lemma von Goursat ist



$$\int_{[c,z_0]+[z_0,z]+[z,c]} f(\zeta)d\zeta = 0$$

und demzufolge

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta\,. \tag{2.4}$$

Wir definieren

$$F_1(z) := \begin{cases} \dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

und müssen die Stetigkeit von F_1 an der Stelle z_0 beweisen. Wegen (2.4) und wegen $\int_{[z_0,z]} d\zeta = z - z_0$ ist für $z \neq z_0$

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} \big(f(\zeta) - f(z_0)\big)\, d\zeta\,,$$

woraus mit Abschätzung (f) folgt:

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \underbrace{\frac{1}{|z - z_0|}\, L([z_0, z])}_{=1} \sup_{\zeta \in [z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)|\,.$$

Da f stetig in z_0 ist, folgt hieraus die Stetigkeit von F_1 in z_0. ■

Wir formulieren noch eine allgemeinere Version des Cauchyschen Integralsatzes und benötigen dazu den Begriff eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Anschaulich bedeutet dies, dass sich jede geschlossene Kurve im Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Hier ist die exakte Definition:

Definition 2.5 *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ zwei geschlossene Wege in einem Gebiet G. Dann heißt γ_0 zu γ_1* homotop *in G, wenn es eine stetige Funktion $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ so gibt, dass*

$$\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \quad \textit{und} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) \quad \textit{für } s \in [0, 1]$$

und

$$\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) \quad \textit{für } t \in [0, 1]\,.$$

Sind γ_0 und γ_1 zueinander homotop, so schreiben wir $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 2.6 *Ein geschlossener Weg γ in G heißt* nullhomotop *($\gamma \sim 0$), wenn γ zu einem konstanten Weg homotop ist.*

Definition 2.7 *Ein Gebiet G heißt* einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.*

Eine andere anschauliche Deutung des einfachen Zusammenhanges ist, dass das Gebiet keine Löcher aufweist. Bezeichnen wir mit $\mathbb{C}^\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die um den Punkt $\infty \notin \mathbb{C}$ erweiterte komplexe Ebene (die wir über die stereographische Projektion mit der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren), so gilt

Satz 2.8 *Ein Gebiet G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn sein Komplement $\mathbb{C}^\infty \backslash G$ in $\mathbb{C}^\infty$ zusammenhängend ist.*

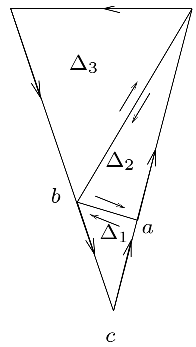
Ein Beweis ist in Conway, Kapitel VIII, Satz 2.2.

Satz 2.9 (Cauchyscher Integralsatz) *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ in G und jede auf G holomorphe Funktion f.*

Einen Beweis finden Sie in Conway, Kapitel IV, Satz 6.15. Dort finden Sie auch weitere Verallgemeinerungen dieses Satzes.

2.3 Die Cauchysche Integralformel

Für den Beweis der Cauchyschen Integralformel benötigen wir Verschärfungen des Goursatschen Lemmas und des Cauchyschen Integralsatzes aus 2.2. Später (Riemannscher Fortsetzungssatz) werden wir sehen, dass diese „Verschärfung“ gar keine ist.



Lemma 2.10 (Lemma von Goursat für punktierte Gebiete) *Sei $D \neq \emptyset$ offen, $c \in D$, f stetig auf D und holomorph auf $D \backslash \{c\}$. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, welches c als Eckpunkt hat,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0\,.$$

Beweis Wir wählen auf den von c ausgehenden Seiten von Δ zwei Punkte a, b und erhalten eine Zerlegung von Δ in Teildreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ wie in der Skizze. Wegen Eigenschaften (d) und (e) gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz\,.$$

Nach dem Goursatschen Lemma, angewandt auf Δ_2 und Δ_3, ist weiter

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\,.$$

Hieraus folgt

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\Big| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \|f\|_{C(\Delta)}\,,$$

und da $L(\partial\Delta_1)$ durch Wahl von a und b beliebig klein gemacht werden kann, ist $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. ∎

Mit diesem Lemma beweist man wie in Abschnitt 2.2 den

Satz 2.11 (Cauchyschen Integralsatz für punktierte Sterngebiete) *Sei G Sterngebiet mit Zentrum c, und die Funktion f sei stetig auf G und holomorph in $G\backslash\{c\}$. Dann ist $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ Stammfunktion von f auf G, und für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Satz 2.12 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben) *Sei D offen, f holomorph auf D, und sei $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| \leq r\}$ Kreisscheibe, die komplett in D liegt und deren Rand im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Dann gilt für alle z im Inneren von B*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

Die Werte von f im Inneren von B sind also vollständig durch die Werte von f auf dem Rand von B bestimmt.

Beweis Für jedes feste z im Inneren von B betrachten wir die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \in D\backslash\{z\} \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z\,. \end{cases}$$

Da f in D holomorph ist, ist g holomorph auf $D\backslash\{z\}$ und stetig auf D. Weiter: da $B \subset D$, gibt es ein $s > r$, so dass auch die offene Kreisscheibe $B' := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < s\}$ in D liegt. Die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf das sternförmige (sogar konvexe) Gebiet B' und die Funktion g liefern $\int_{\partial B} g(\zeta)d\zeta = 0$. Benutzen wir noch Beispiel 2 aus 2.1, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial B} g(\zeta)d\zeta &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i f(z)\,, \end{aligned}$$

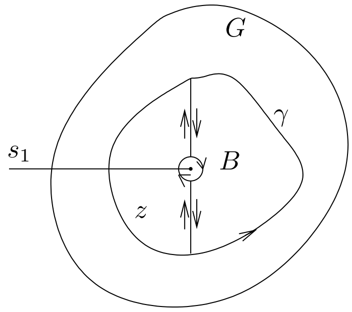
woraus durch Umstellen die Behauptung folgt. ∎

Die Cauchysche Integralformel gilt nicht nur für Kreisscheiben. Eine nützliche Verallgemeinerung des obigen Resultats ist

Satz 2.13 (Cauchysche Integralformel) *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener und doppelpunktfreier Weg in G. Weiter sei z im Inneren von γ und f holomorph auf G.*

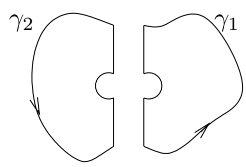
Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$



Beweisidee Wir führen den Beweis zurück auf die schon bewiesene Integralformel für Kreisscheiben. Dann wählen wir eine Kreisscheibe B um z, die ganz im Inneren von γ liegt und erzeugen wie in der Skizze zwei geschlossene Kurven γ_1 und γ_2.

Weiter sei s_1 ein von z ausgehender Strahl, der γ_1 nicht schneidet. Wir schneiden G von z beginnend entlang s_1 auf, bis wir auf den Rand von G treffen. Das so erhaltene „Schlitzgebiet“ G_1 ist wieder einfach zusammenhängend, die Kurve γ_1 liegt in diesem Gebiet, und die Funktion $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist auf G_1 holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist



$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0\,. \quad \text{Analog ist auch} \quad \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0\,.$$

Damit ist

$$0 = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz\,.$$

Die Cauchysche Integralformel für Kreisgebiete liefert nun die Behauptung. ∎

2.4 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

In Abschnitt 1.2, Satz 1.4, haben wir gesehen, dass jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z-c)^k$ mit positivem Konvergenzradius R im Inneren ihres Konvergenzkreises $\{z : |z-c| < R\}$ holomorph ist und dass die abgeleitete Potenzreihe $f'(z) = \sum_{k=1}^\infty k a_k (z-c)^{k-1}$ den gleichen Konvergenzradius hat. Hieraus folgt natürlich, dass holomorphe Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, unendlich oft komplex differenzierbar sind. Wir zeigen nun, dass sich jede holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln läßt. Diese Aussage wird leicht aus dem folgenden Lemma folgen.

Lemma 2.14 (Entwicklungslemma) *Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$ mit zugehöriger Kurve Γ, und sei $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$$

holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\Gamma$. Für jedes $c \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \quad \mathit{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}}\, d\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um c, die Γ nicht trifft, gegen F.
Weiter: Die Funktion F ist in $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ unendlich oft komplex differenzierbar, und

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,.$$

Aus diesem Lemma folgt natürlich, dass F auf $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ unendlich oft komplex differenzierbar ist, und da die Koeffizienten einer Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ durch $a_k = \frac{1}{k!}\, F^{(k)}(c)$ gegeben sind, folgt weiter

$$F^{(k)}(c) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}}\, d\zeta\,. \tag{2.5}$$

Beweis von Lemma 2.14 Sei $c \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ und $B = \{z : |z - c| < r\}$ eine Kreisscheibe, welche Γ nicht trifft. Bekanntlich konvergiert für alle w mit $|w| < 1$ die Reihe

$$\frac{1}{(1-w)^{k+1}} = \sum_{n\geq k}\binom{n}{k} w^{n-k}\,. \tag{2.6}$$

Für $z \in B$ und $\zeta \in \Gamma$ ist $w := \frac{z-c}{\zeta - c}$ vom Betrag < 1, und wegen (2.6) folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} &= \frac{1}{\big((\zeta - c) - (z-c)\big)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta - c)^{k+1}(1-w)^{k+1}} = \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}\frac{(z-c)^{n-k}}{(\zeta - c)^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Mit $g_n(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - c)^{n+1}$ erhalten wir für alle $z \in B$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Big(\sum_{n\geq k}\binom{n}{k} k!\, g_n(\zeta)(z-c)^{n-k}\Big)\, d\zeta\,. \tag{2.7}$$

Die Reihe unter dem rechten Integral konvergiert für jedes feste $z \in B$ gleichmäßig auf Γ. Wegen $|\zeta - c| \geq r$ ist nämlich mit $q := \frac{1}{r}\,|z - c|$

$$|g_n(\zeta)|\,|z-c|^{n-k} = |f(\zeta)|\,\frac{|z-c|^{n-k}}{|\zeta - c|^{n+1}} \leq \frac{|f(\zeta)|}{r^{k+1}}\, q^{n-k} \leq \frac{\|f\|_{C(\Gamma)}}{r^{k+1}}\, q^{n-k}\,,$$

und wegen $q < 1$ und (2.6) konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} q^{n-k}$. Wir können also in (2.7) Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} k!\,(z-c)^{n-k} \cdot a_n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta\,.$$

Damit ist klar, dass F auf B durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ dargestellt wird (in obigen Herleitungen $k = 0$ setzen), und wir haben auch noch einmal die Beziehung (2.5) hergeleitet. ■

Man kann also jeder auf Γ stetigen Funktion f eine auf $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ holomorphe Funktion F zuordnen. Der Zusammenhang zwischen f und F ist nicht offensichtlich, so gilt z.B. i.a. NICHT, dass $\lim_{z\to z_0} F(z) = f(z_0)$ für $z_0 \in \Gamma$. Dies ändert sich auf Grund der Cauchyschen Integralformel, wenn wir von vornherein f als holomorph (in einer Umgebung von Γ) annehmen.

Satz 2.15 (Entwicklungssatz) *Sei D offen, $c \in D$, und B sei die größte offene Kreisscheibe um c in D. Dann ist jede in D holomorphe Funktion f um c in einer Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n (z-c)^n$ entwickelbar, die auf B gegen f konvergiert. Die Taylorkoeffizienten ergeben sich aus*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta\,,$$

wobei B' irgendein Kreis um c ist, der kleiner als B ist, und dessen Rand im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Insbesondere ist f in D unendlich oft komplex differenzierbar, und in jeder Kreisscheibe B' gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,, \quad z \in B',\, n \geq 0\,.$$

Beweis Da f holomorph, gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in B'\,.$$

Das Entwicklungslemma (angewandt auf $\gamma := \partial B'$ und $F := f$ auf B') liefert die Behauptung. ■

Anmerkungen

- Funktionen, die auf einer offenen Menge *einmal* komplex differenzierbar sind, sind dort bereits *unendlich oft* komplex differenzierbar.
- Auf einer Kreisscheibe unendlich oft komplex-differenzierbare Funktionen lassen sich in auf dieser Scheibe konvergente Potenzreihen entwickeln (man vergleiche dazu die Situation im Reellen).
- Man kann die unendliche Differenzierbarkeit holomorpher Funktion auch beweisen, indem man von der Cauchyschen Integralformel ausgeht und die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation beweist. Wir haben dagegen die Vertauschbarkeit von Integration und Summation benutzt.

Es folgen einige unmittelbare Anwendungen des Entwicklungssatzes. Die erste betrifft eine gewisse Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes.

Satz 2.16 (Satz von Morera) *Sei f auf einem sternförmigen Gebiet G stetig, und für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G gelte $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Dann ist f holomorph auf G.*

Beweis Sei c ein Zentrum von G. Wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes macht man sich klar, dass $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ eine Stammfunktion für f ist, d.h. dass F komplex differenzierbar und $F'(z) = f(z)$ ist. Nach dem Entwicklungssatz existiert auch F'' und damit f'. ■

Als nächstes überlegen wir uns, dass die "Verschärfung" des Goursatschen Lemmas gar keine war.

Satz 2.17 (Riemannscher Fortsetzungssatz) *Sei D offen, $c \in D$, und die Funktion f sei auf $D\backslash\{c\}$ holomorph und in einer Umgebung U von c beschränkt. Dann läßt sich f zu einer auf ganz D holomorphen Funktion fortsetzen.*

Dieser Satz ist „scharf" in folgendem Sinn: Ist f auf jeder Umgebung von c unbeschränkt, so ist f nicht zu einer stetigen Funktion auf D fortsetzbar.

Beweis O.E.d.A sei $c = 0$. Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) := \begin{cases} zf(z) & \text{für } z \in D\backslash\{0\} \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(z) := zg(z) \text{ für } z \in D\,.$$

Unsere Annahme garantiert, dass g stetig in 0 ist. Wegen $h(z) = zg(z) = h(0) + zg(z)$ ist daher h komplex differenzierbar in $0 \in D$. Auf $D\backslash\{0\}$ ist h

ebenfalls komplex differenzierbar, da dort gilt $h(z) = z^2 f(z)$. Also ist h holomorph auf D und folglich in einer Umgebung U der 0 in eine Potenzreihe entwickelbar: $h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Nach Konstruktion ist $h(0) = 0$ und außerdem $h'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{h(z)-h(0)}{z} = \lim_{z \to 0} g(z) = g(0) = 0$. Die Potenzreihe von h reduziert sich also auf $h(z) = z^2(a_2 + a_3 z + \ldots)$. Wegen $h(z) = z^2 f(z)$ für $z \neq 0$ ist $\hat{f}(z) := a_2 + a_3 z + \ldots$ die holomorphe Fortsetzung von f auf ganz U. ∎

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Anwendungen auf Potenzreihen.

Division von Potenzreihen. Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ eine in einer Umgebung von 0 konvergente Potenzreihe und sei $a_0 \neq 0$. Dann ist $1/f$ in einer Umgebung von 0 holomorph (Quotientenregel) und nach dem Entwicklungssatz dort wieder in eine Potenzreihe entwickelbar. (Man vergleiche den mühsamen Beweis aus Analysis II.)

Bestimmung von Konvergenzradien. Der Entwicklungssatz gestattet häufig die unmittelbare Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(z) = z/(e^z - 1)$.

Diese ist zunächst für alle z mit $e^z \neq 1$ definiert, d.h. für alle $z \neq 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Sie ist jedoch noch holomorph auf den Punkt 0 fortsetzbar, denn $e^z - 1 = z\big(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\big)$. Wir können f also in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln, und diese Reihe konvergiert im größten Kreis um 0, der im Holomorphiegebiet liegt. Der Konvergenzradius der Potenzreihe von f ist also 2π.