1 Differentiation im Komplexen

1.1 Definition und einfache Eigenschaften

Die folgende Definition der komplexen Differenzierbarkeit mittels der komplexen Division ist eine folgenreiche Verschärfung der Differentiation im $\mathbb{R}^2$.

Definition 1.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt in z_0* komplex differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Falls dieser Grenzwert existiert, nennen wir ihn Ableitung *von f in z_0 und bezeichnen ihn mit $f'(z_0)$. Ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar, so heißt f* holomorph auf *D.*

Beispiele Wie im Reellen zeigt man, daß jede ganzrationale Funktion (= Polynom)

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\,, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und dass für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + 2 a_2 z + a_1\,.$$

Dagegen ist die Funktion $f(z) = \overline{z}$ (= konjugiert komplexe Zahl zu z) in keinem Punkt komplex differenzierbar. Der Ausdruck

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

ist nämlich 1 für $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und -1 für $h \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}$ und besitzt daher keinen Grenzwert für $h \to 0$. Auch die Funktionen $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$ sind nirgends komplex differenzierbar. ■

Wie im Reellen beweist man, dass mit zwei Funktionen f, g auch deren Summe und deren Produkt in einem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar bzw. auf D holomorph sind und dass

$$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)\,, \quad (fg)'(z) = f'(z)\,g(z) + f(z) g'(z)\,.$$

Ist außerdem $g(z) \neq 0$ auf D, so ist auch f/g holomorph, und es gilt

$$\big(f/g\big)'(z) = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g(z)^2}\,.$$

Sind schließlich f und g auf D bzw. D' holomorphe Funktionen und ist $f(D) \subseteq D'$, so ist $g \circ f$ auf D holomorph, und es gilt die *Kettenregel*

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z) \,.$$

Die komplexe Differenzierbarkeit läßt sich auch über eine *Zerlegungsformel* charakterisieren: f ist in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar genau dann, wenn ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine Funktion r mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ existieren so, dass

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + r(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0\,.$$

Mit dieser Zerlegungsformel sieht man, dass die komplexe Differenzierbarkeit die Stetigkeit impliziert.

1.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $z = x + iy$ und $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Wir stellen einen Zusammenhang zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von f in z und der Differenzierbarkeit von u und v in (x,y) her.

Satz 1.2 (a) *Ist f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so sind u und v in (x_0, y_0) partiell differenzierbar, und es gelten in diesem Punkt die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \,, \quad u_y = -v_x \,. \tag{1.1}$$

(b) *Sind u und v in z differenzierbare reelle Funktionen und gelten in $(x,y) \mathrel{\hat{=}} z \in D$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* (1.1)*, so ist die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ in z komplex-differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = -i\big(u_y(x,y) + iv_y(x,y)\big)\,. \tag{1.2}$$

Beweis Sei f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

soll existieren. Lassen wir h entlang der reellen Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so folgt

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+t)-f(z_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)+iv(x_0+t,y_0)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t} + i\,\frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t} + i\lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t} + i\lim_{t\to 0} \frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t} \\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

(man beachte, dass eine Folge in $\mathbb{C}$ genau dann konvergiert, wenn die Folgen ihrer Real- und Imaginärteile in $\mathbb{R}$ konvergieren). Lassen wir dagegen h entlang der imaginären Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = it$ mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so folgt analog

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t)+iv(x_0,y_0+t)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{it} \\
&= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0} \left(\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t} + i\,\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t}\right) \\
&= \frac{1}{i}\big(u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)\big) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile in den beiden letzten Beziehungen zeigt, dass $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ in z_0.

(b) Differenzierbarkeit von u und v in z heißt: es gibt Funktionen r und s mit

$$\lim_{(h,g)\to 0} \frac{r(h,g)}{||(h,g)||} = 0\,, \qquad \lim_{(h,g)\to 0} \frac{s(h,g)}{||(h,g)||} = 0\,,$$

so dass mit $z = (x,y)$

$$\begin{aligned}
u(x+h,y+g)-u(x,y) &= \big(u_x(z),u_y(z)\big)\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + r(h,g)\,, \\
v(x+h,y+g)-v(x,y) &= \big(v_x(z),v_y(z)\big)\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + s(h,g)\,.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit i, addieren sie zur ersten Gleichung und beachten dabei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
f\big(z+(h+ig)\big)-f(z) &= u_x(z)h+u_y(z)g+iv_x(z)+iv_y(z)g+r(h,g)+is(h,g) \\
&= u_x(z)(h+ig)+iv_x(z)(h+ig)+r(h,g)+is(h,g)\,.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{f\big(z+(h+ig)\big)-f(z)}{h+ig} = u_x(z)+iv_x(z)+\frac{r(h,g)}{h+ig}+\frac{is(h,g)}{h+ig}\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\lim_{h+ig\to 0}\left|\frac{r(h,g)}{h+ig}\right| = \lim_{(h,g)\to 0}\frac{|r(h,g)|}{\|(h,g)\|}=0\,,$$

und der entsprechenden Beziehung für s. ■

Beispiel Für die Funktion $f(z)=f(x+iy):=x^3y^2+ix^2y^3$ gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt $z_0=x_0+iy_0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0)=3x_0^2y_0^2 &\overset{!}{=} 3x_0^2y_0^2 = v_y(x_0,y_0) \quad \text{und} \\ u_y(x_0,y_0)=2x_0^3y_0 &\overset{!}{=} -2x_0y_0^3 = -v_x(x_0,y_0)\,, \end{aligned}$$

d.h. genau dann, wenn $x_0y_0(x_0^2+y_0^2)=0$, d.h. genau dann, wenn $x_0=0$ oder $y_0=0$. Die Funktion f ist also genau dann in $z_0\in\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn z_0 auf der reellen oder imaginären Achse liegt. Insbesondere ist f auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph. ■

Folgerung 1.3 *Sei $D\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen für eine Funktion $f:D\to\mathbb{C}$ äquivalent:*

(a) *f ist konstant auf D.*
(b) *f ist holomorph auf D und $f'(z)=0\quad\forall z\in D$.*

Beweis Wir zeigen nur die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Aus $f'=0$ auf D und aus den Beziehungen (1.2) (d.h. $f'=u_x+iv_x=-i(u_y+iv_y)$) folgt

$$u_x(z)=u_y(z)=v_x(z)=v_y(z)=0 \quad \text{für alle } z\in D\,.$$

Wie wir aus der reellen Analysis wissen, müssen u und v und somit auch f konstante Funktionen sein. ■

Als weitere Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zeigen wir

Satz 1.4 *Eine komplexe Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph.*

Beweis Sei $f(z)=\sum_{k=0}^\infty a_kz^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$, und sei $f_n(z):=\sum_{k=0}^n a_kz^k$ ihre n. Partialsumme. Die Real- und Imaginärteile von f bzw. f_n seien u,v bzw. u_n,v_n. Offenbar ist $f_n'(z)=\sum_{k=1}^n ka_kz^{k-1}$, und wir wissen bereits, dass die Reihen $\sum_{k=0}^\infty a_kz^k$ und $\sum_{k=1}^\infty ka_kz^{k-1}$ den gleichen

Konvergenzradius R besitzen. Folglich konvergieren die Funktionen f_n bzw. f_n' auf jedem Kreis $\{z : |z| \leq r\}$ mit $r < R$ *gleichmäßig* gegen die Funktion $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ bzw. gegen $z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. Dann konvergieren aber auch die Real- und Imaginärteile $u_n, v_n, u_{nx}, v_{ny}, v_{nx}, v_{ny}$ dieser Funktionen auf $\{z : |z| \leq r\}$ gleichmäßig. Hieraus folgt, dass die Funktionen u, v für $|z| < r$ differenzierbar sind und dass gilt

$$u_{nx} \to u_x, \quad u_{ny} \to u_y, \quad v_{nx} \to v_x, \quad v_{ny} \to v_y \quad \text{gleichmäßig.}$$

Das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen f_n zieht daher das Bestehen dieser Differentialgleichungen für die Funktion f nach sich:

$$u_x(z) = \lim_{n\to\infty} u_{nx}(z) = \lim_{n\to\infty} v_{ny}(z) = v_y(z) \qquad \text{und analog } u_y(z) = -v_x(z)$$

für alle $|z| < r$. Schließlich ist (wieder wegen der gleichmäßigen Konvergenz) die Funktion $z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ und damit auch die Funktionen u_x, u_y, v_x, v_y stetig auf $\{z : |z| < r\}$. Da $r < R$ beliebig war, erhalten wir das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f sowie die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $u_x, \ldots, v_y$ in jedem Punkt z mit $|z| < R$. Nach Satz 1.2 ist f in $\{z : |z| < R\}$ holomorph. ■

Beispiel Insbesondere sind die durch

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

definierten Funktionen in der gesamten komplexen Ebene $\mathbb{C}$ holomorph. Solche Funktionen heißen auch *ganze Funktionen*. Weitere Beispiele für ganze Funktionen sind Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und die Funktionen

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Außerdem folgt aus dem Beweis von Satz 1.4, dass Regeln wie

$$(e^z)' = e^z, \quad \sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z$$

auch im Sinne der komplexen Differentiation gültig bleiben. ■

1.3 Differenzierbarkeit im Reellen und im Komplexen

Jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann auch als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachtet werden. Wir wollen uns den Unterschied zwischen der Differenzierbarkeit der

Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ und der komplexen Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ klarmachen.

Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in $z \in \mathbb{R}^2$ heißt, dass es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (genauer: eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung) und eine Funktion $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ so gibt, dass

$$f(z+h) - f(z) = Ah + r(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0 \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Die Abbildung A wird dabei durch die (reelle) Jacobimatrix

$$A \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

beschrieben. Komplexe Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ können wir dagegen so deuten: Es gibt eine lineare Abbildung $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (genauer: eine $\mathbb{C}$-*lineare* Abbildung) und eine Funktion $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = 0$ so, dass

$$f(z+h) - f(z) = Bh + s(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0 \in \mathbb{C}\,. \tag{1.5}$$

Die Abbildung B wird dabei durch die (komplexe) 1×1 Matrix $\big(f'(z)\big)$ bzw. einfach durch die komplexe Zahl $f'(z)$ gegeben. Der wesentliche Unterschied zwischen (1.3) und (1.5) besteht darin, dass wir in (1.3) durch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und in (1.5) durch eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ approximieren.

Wir fragen uns nun, wann allgemein durch eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ induziert wird, wenn wir wie üblich $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in \mathbb{C}$ identifizieren. Soll A $\mathbb{C}$-linear sein, so gilt einerseits

$$Ai = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b + id$$

und andererseits

$$Ai = iA \cdot 1 = iA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = i(a + ic) = -c + ia\,.$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $a = d$ und $b = -c$. Nur Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liefern also $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen. Angewandt auf die Matrix (1.4) heißt das: (1.4) liefert nur dann eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, wenn $u_x(z) = v_y(z)$ und $u_y(z) = -v_x(z)$, d.h. wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also genau die Zusatzbedingung, die aus der Differenzierbarkeit im Reellen die komplexe Differenzierbarkeit macht.

1.4 Harmonische Funktionen

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern eine sehr einschränkende Bedingung dafür, wann eine im Reellen differenzierbare Funktion Realteil einer holomorphen Funktion ist.

Satz 1.5 *Ist $f = u + iv$ in D holomorph und sind die Funktionen u, v zweimal stetig differenzierbar (im Reellen), so gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \textit{in } D\,.$$

Beweis Aus der Holomorphie von f folgt $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Erneutes Ableiten ergibt $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{xy} = v_{yy}$, $u_{yx} = -v_{xx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$ und daher $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$, $v_{xx} + v_{yy} = u_{xy} - u_{yx}$. Nach dem Satz von H.A. Schwarz sind die rechten Seiten dieser Identitäten gleich 0. ∎

Wir werden später sehen, dass die geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften von u und v bereits aus der Holomorphie von f folgen. Ist u eine (reell) zweimal partiell differenzierbare Funktion, so erklärt man den *Laplaceoperator* Δ durch

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy}\,.$$

Funktionen u mit der Eigenschaft $\Delta u = 0$ heißen *harmonisch* oder *Potentialfunktionen.* Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind also harmonische Funktionen (wobei wir im Moment noch eine Zusatzbedingung fordern müssen). Beispielsweise sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^2) &= \mathrm{Re}(x+iy)^2 = x^2 - y^2 =: u(x,y) \\ \mathrm{Im}(e^z) &= \mathrm{Im}\big(e^x(\cos y + i \sin y)\big) = e^x \sin y =: v(x,y) \end{aligned}$$

harmonische Funktionen.