Funktionentheorie

(Theorie der komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen)

Erste Ansätze der Funktionentheorie findet man bei Euler (1707–1783): Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, Elliptische Integrale. Gauß (1777–1855) hat nicht nur den komplexen Zahlen zum Durchbruch verholfen (Gaußsche Zahlenebene), sondern war wohl auch bereits im Besitz der grundlegenden Sätze der Funktionentheorie bis hin etwa zum Cauchyschen Integralsatz. Diese Gauß'schen Resultate blieben meist unveröffentlicht und sind z.T. nur aus Gauß' Briefwechsel bekannt.

Den systematischen Aufbau der Funktionentheorie verdanken wir im Wesentlichen Cauchy (1789–1857), Riemann (1826–1866) und Weierstraß (1815–1897). Jeder von ihnen prägte die Funktionentheorie auf seine Weise, und man spricht heute noch vom Cauchyschen, Riemannschen und Weierstraßschen Standpunkt.

Cauchy:	Integraldarstellung, Cauchyscher Integralsatz, Residuen
Riemann:	geometrischer Standpunkt, Abbildungseigenschaften wie Winkeltreue, Riemannsche Flächen, Riemannsche Vermutung
Weierstraß:	Potenzreihen.

Die moderne Funktionentheorie besticht sowohl durch ihre innere Schönheit und Eleganz als auch durch ihre zahlreichen und vielfältigen Anwendungen, die vom Beweis des Primzahlsatzes bis zur Berechnung von Tragflügelumströmungen reichen.

Wir betrachten in dieser Vorlesung ausschließlich *komplexe* Funktionen *einer* komplexen Veränderlichen. Viele der gezeigten Resultate lassen sich problemlos verallgemeinern auf Funktionen $f : \mathbb{C} \to X$, wobei X ein komplexer Banachraum (= vollständiger normierter Raum) ist. Die Theorie der Funktionen *mehrerer* komplexer Veränderlicher erweist sich dagegen als außerordentlich anspruchsvoll.

Literatur

Remmert:	Funktionentheorie 1
Conway:	Functions of One Complex Variable
Behnke/Sommer:	Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen
Fischer/Lieb:	Funktionentheorie
Golusin:	Geometrische Funktionentheorie
Heuser:	Analysis II
Martensen:	Analysis IV
Needham:	Anschauliche Funktionentheorie (auch in Englisch)

Vorkenntnisse aus den Vorlesungen Analysis I, II und Lineare Algebra.

- $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$ mit Multiplikation $(s,t)\cdot(x,y) = (sx-ty,\ tx+sy)$. $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist *Körper.*

- $\mathbb{C}$ ist linearer Raum über $\mathbb{R}$ der Dimension 2 und linearer Raum über $\mathbb{C}$ der Dimension 1. Schreiben und identifizieren

  $$\mathbb{C} \ni z = x + iy \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

  Jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bestimmt und wird bestimmt durch 2 Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

  $$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y) .$$

  $|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert *Norm* und $d(w,z) := |w - z|$ *Abstand* auf $\mathbb{C}$.
  $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ is metrischer, sogar normierter Raum, vollständig.
  $\Rightarrow$ offene und abgeschlossene Mengen, Rand, Umgebung, ...

- Stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$ (Definition, Eigenschaften). $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in $z = x + iy$ stetig $\Leftrightarrow$ $u, v : R^2 \to \mathbb{R}$ in (x,y) stetig.

- Folgen und Reihen komplexer Zahlen, insbesondere Potenzreihen (Konvergenzverhalten, Konvergenzradius, absolute Konvergenz)

- Stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Weg.* Die Bildmenge eines Weges heißt *Kurve.* Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend* (oder kurz: *zusammenhängend*), wenn es zu je zwei Punkten $w, z \in D$ einen Weg $\gamma : [a,b] \to D$ mit $\gamma(a) = w$ und $\gamma(b) = z$ gibt. Nichtleere offene und (weg-)zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ heißen *Gebiete.*

- Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Teilmengen U, V von X gibt mit $U \cap V = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ und $A \subseteq U \cup V$.

- Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^2$, Wegunabhängigkeit