Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16. Januar 2007

11. Tutorium zur Analysis III

Das Maximum Prinzip

Aufgaben

A 1 Sei G ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G holomorph ist. Weiterhin gebe es ein $c \geq 0$, so dass gilt $|f(z)| = c$ auf ∂G.
Zeige: Hat f keine Nullstelle in G, so ist f konstant.

A 2 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Zeige, dass für jedes $c > 0$ der Abschluss der Menge $\{z \mid |f(z)| < c\}$ die Menge $\{z \mid |f(z)| \leq c\}$ ist.

A 3 **Definition:** Eine Zusammenhangskomponente U einer Menge M ist eine zusammenhängende Teilmenge von M, so dass für jede zusammenhängende Menge V mit $U \subset V \subset M$ gilt $U = V$.

(a) Skizziere (grob, ohne zu rechnen die Mengen) $\{z \mid |z||1-z| < c\}$ für $c = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{4}$ und $c = 1$. Bestimme anhand der Zeichnung die Zusammenhangskomponenten der Menge.

(b) Sei p ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass jede Zusammenhangskomponente von der Menge $\{z \mid |p(z)| < c\}$ eine Nullstelle von p enthält.

(c) Sei wieder p ein nichtkonstantes Polynom. Weiterhin sei c so gewählt, dass $p'(z) \neq 0$ für alle z mit $|p(z)| = c$ gilt (Da p' nur endlich viele Nullstellen hat, ist dies keine große Einschränkung). Zeige, dass $\{z \mid |p(z)| = c\}$ die Vereinigung von endlich vielen geschlossenen C^∞-Pfaden ist. Diskutiere das Verhalten dieser Pfade für $c \to \infty$.