**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006   21. Dezember 2006

# Analysis III

## 10. Tutorium

### (T 1) Zusammenhang

**Definition:** Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, $(X \subset \mathbb{C})$ heißt *lokal-konstant*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt so daß $f_{|U}$ konstant ist.

(a) Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Jede lokal-konstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.
2. Für jede nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmenge $A$ von $X$ gilt $A = X$.

(b) Eine Teilmenge $X$ von $\mathbb{C}$, welche obige Eigenschaften hat, nennt man *zusammenhängend*. Skizziere jeweils exemplarisch eine zusammenhängende Teilmenge und eine Teilmenge, die nicht zusammenhängend ist.

### (T 2) Wegzusammenhang und Zusammenhang I

**Definition:** Eine Teilmenge $X$ von $\mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x \in X$ und $y \in X$ einen Weg von $x$ nach $y$ in $X$ gibt.

(a) Ist die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ wegzusammenhängend?

(b) Skizziere jeweils exemplarisch eine offene wegzusammenhängende Teilmenge und eine offene Teilmenge, die nicht wegzusammenhängend ist.

(c) Sind wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ zusammenhängend?

(d) Suche ein Beispiel einer zusammenhängenden aber nicht wegzusammenhängenden Menge.

### (T 3) Wegzusammenhang und Zusammenhang II

Im folgenden sei $D$ eine offene nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$ (d.h. ein *Bereich*) und $p \in D$ ein Punkt aus $D$. Wir definieren eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls es einen Weg von } c \text{ nach } z \text{ in } D \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Beweise, daß $f$ lokal-konstant ist.

(b) Zeige, daß zusammenhängende Bereiche wegzusammenhängend sind.

### (T 4) Gebiete

**Definition:** Ein zusammenhängender Bereich heißt *Gebiet*.

(a) Sind Gebiete offen oder wegzusammenhängend?

(b) Untersuche folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ darauf, ob sie zusammenhängend, wegzusammenhängend, Bereiche oder Gebiete sind:

(i) Die Halbebene $\mathbb{H}$ (ii) $B_1(-1) \cup B_1(1)$ (iii) Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{E}}$
(iv) $B_1(0) \setminus \{0\}$ (v) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (vi) $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$

### (T 5) Sterngebiete

**Definition:** Ein Teilmenge $\Omega$ von $\mathbb{C}$ mit $p \in \Omega$ heißt *sternförmig bezüglich* $p$, wenn für alle $z \in \Omega$ das Geradenstück $p + [0,1] \cdot (z-p)$ in $\Omega$ liegt.

(a) Mache Dir eine exemplarische Skizze eines sternförmigen Menge.

(b) Sind sternförmige Mengen wegzusammenhängend?

(c) Sind sternförmige Mengen Bereiche oder Gebiete?

(d) Sind offene sternförmige Mengen Bereiche oder Gebiete?

(e) Untersuche die Teilmengen aus Aufgabe 3 darauf, ob sie sternförmig sind. Sind Sie sternförmige Gebiete?

### (T 6) Homotope Wege

Gegeben seien die beiden geschlossenen Kurven $\varphi_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 0, 1$

$$\varphi_0(t) = 2e^{it} + 3, \qquad \varphi_1(t) = e^{it} - 1.$$

(a) Geben Sie eine Homotopie $H : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ im Sinne von Definition 2.5 an, so daß $H(t,0) = \varphi_0(t)$ und $H(t,1) = \varphi_1(t)$ gilt.

(b) Skizzieren Sie die Kurven $H(-,0)$,$H(-,\frac{1}{4})$,$H(-,\frac{1}{2})$,$H(-,\frac{3}{4})$ und $H(-,1)$.

### (T 7) Homotopie

Gegeben seien die folgenden Kurven in $\varphi_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$

$$a)\ \gamma_1(t) = e^{it}, \quad b)\ \gamma_2(t) = e^{2it} + 5, \quad c)\ \gamma_3(t) = \frac{1}{|\sin t| + |\cos t|} e^{it}.$$

Zeichnen Sie diese Kurven und entscheiden sie anschaulich (ohne mathematischen Beweis), welche der Kurven homotop sind und welche nicht.

### (T 8)

Zeichnen Sie eine Möglichkeit, ein Bild mit zwei Nägeln so aufzuhängen, dass es hängen bleibt, solange beide Nägel in der Wand sind. Jedoch soll es herunterfallen, sobald einer der Nägel entfernt wird.