Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Dezember 2006

9. Tutorium zur Analysis III

Die Riemannsche Zahlenkugel

Aufgaben

A 1 Wir betrachten die Sphäre $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und identifizieren $\mathbb{C}$ durch die Abbildung

$$z = x + iy \longmapsto (x, y, 0) \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$$

mit der Äquatorialebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. Den Punkt $e_3 = (0, 0, 1) \in S$ nennen wir den *Nordpol*, und $\mathbb{C}$ ergänzen wir durch $\infty \notin \mathbb{C}$ zu $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die *stereographische Projektion*

$$\pi \colon S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

wird folgendermaßen definiert: Es ist $\pi(e_3) := \infty$, und für $x \in S \setminus \{e_3\}$ ist $\pi(x)$ der Schnittpunkt der Äquatorialebene $\mathbb{C}$ mit der Verbindungsgeraden von x und e_3. In diesem Zusammenhang heißt S auch die *Riemannsche Zahlenkugel*.

(a) Skizzieren Sie die Lage von S und $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}^3$ und die Abbildung π.

(b) Erklären Sie anschaulich, dass π bijektiv ist. Zeigen Sie, daß für $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{e_3\}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die Formeln

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad \text{und} \quad \pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

gelten.

A 2 Wir definieren, was offene Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ sind:
Ist $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ so heißt ∞ innerer Punkt von U, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset U.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ sind innere Punkte im üblichen Sinne definiert. $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen, falls alle Punkte innere Punkte sind.
Zeige: Mit dieser Defnition ist $\hat{\mathbb{C}}$ überdeckungskompakt, das heißt: Ist $\mathfrak{U}$ ein System offener Mengen und

$$\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U,$$

so gibt es endlich viele $U_1, ..., U_N \in \mathfrak{U}$ mit $\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=1}^N U_i$.

A 3 Verwenden Sie zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben die Notationen und Definitionen aus A1.

(a) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die S in mehr als einem Punkt schneidet. Zeige, daß das Bild $\pi(E \cap S)$ für $e_3 \in E$ eine Gerade und für $e_3 \notin E$ ein Kreis ist. (Man stellt E wohl am besten in Hessescher Normalform dar.)

(b) Zeige, daß jede Gerade und jeder Kreis in $\mathbb{C}$ wie in Teil (a) entsteht.