Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Dezember 2006

7. Tutorium zur Analysis III

Einfache Randwertprobleme

Aufgaben

A 1 (Finde Gegenbeispiele)
Finde jeweils ein Beispiel für ein Randwertproblem einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1,$$

welches

(a) keine Lösung besitzt.

(b) mehr als eine Lösung besitzt.

A 2 (Die schwingende Saite)
Eine Saite der Länge π sei in den Punkten 0 und π der x-Achse fest eingespannt. Setzt man sie durch Zupfen in Bewegung, so hat sie im Punkt x zur Zeit t eine Auslenkung $u(x,t)$, welche der partiellen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit einer Konstanten } \alpha > 0 \tag{1}$$

genügt. Um diese Gleichung zu lösen, macht man den *Separationsansatz*

$$u(x,t) = v(x)w(t)\,. \tag{2}$$

Wir behaupten nicht, dass jede Lösung diese Gestalt hat – hoffen jedoch, auf diese Art und Weise wenigstens einige (und hoffentlich besonders interessante) Lösungen zu finden. Der Separationsansatz führt auf

$$v(x)\ddot{w}(t) = \alpha^2 v''(x)w(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(x)}{v(x)}\,,$$

wobei die Punkte Ableitungen nach t bezeichnen, die Striche Ableitungen nach x. Beachte, dass in letzterer Gleichung die linke Seite unabhängig von x ist, die rechte Seite unabhängig von t. Da beide Seiten gleich sind, sind beide sowohl von x als auch von t unabhängig, also konstant: es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -\alpha^2\lambda$$

(die Konstante $-\lambda$ statt λ zu nennen, erweist sich als günstiger für die folgenden Rechnungen). Die Funktionen v und w genügen nach dem Vorigen also den Differentialgleichungen

$$v'' + \lambda\, v = 0 \quad \text{bzw.} \tag{3}$$

$$\ddot{w} + \alpha^2\lambda\, w = 0\,. \tag{4}$$

Da die Saite an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ fest eingespannt ist, ist dort keine Auslenkung möglich; es muss also $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ gelten und somit

$$v(0)\, w(t) = v(\pi)\, w(t) = 0$$

für alle t. Wenn wir von dem uninteressanten Fall absehen, dass die Saite völlig in Ruhe ist, also $w(t) = 0$ für alle t, so gibt es mindestens ein t mit $w(t) \neq 0$, und Division führt uns auf die Bedingungen

$$v(0) = v(\pi) = 0\,,$$

welche alle für das beschriebene physikalische Problem relevanten Lösungen v der Differentialgleichung (3) zu erfüllen haben. Dies ist etwas Neues – wir haben hier nicht ein Anfangswertproblem vorliegen, bei dem wir etwa $v(x_0)$ und $v'(x_0)$ vorschreiben – sondern wir haben ein *Randwertproblem*

$$v'' + \lambda\, v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{5}$$

zu lösen, suchen also Lösungen der Differentialgleichung, welche an vorgeschriebenen Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$ vorgeschriebene Werte $v(x_0)$ und $v(x_1)$ $(= 0)$ annehmen. Wir interessieren uns nur für nicht-triviale Lösungen, es sei also v nicht konstant 0.

(a) Zeige, dass $\lambda \int_0^\pi v(x)^2\, dx > 0$ für jede nicht-triviale Lösung v des Randwertproblems (5) gilt und es daher nur für $\lambda > 0$ nicht-triviale Lösungen geben kann.
[Hinweis: Es gilt $\lambda v^2 = -vv''$].

(b) Es sei $\lambda > 0$ fest vorgegeben. Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3).

(c) Berechne, für welche Werte von $\lambda > 0$ ("Eigenwerte") man die in der allgemeinen Lösung aus Teil (b) auftauchenden Konstanten so wählen kann, dass man eine nicht-triviale Lösung das Randwertproblems (5) erhält.

(d) Skizziere die in (c) erhaltenen Lösungen auf $[0, \pi]$ (die so genannten "Eigenlösungen" des Randwertproblems) für die drei kleinsten möglichen Werte von λ.

(e) Bestimme nun noch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4) für w und schreibe dann die durch den Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ gefundenen Lösung der Wellengleichung (1) explizit hin.

Bemerkung 1. Die Lösungen lassen sich als Grundschwingungen und Oberschwingungen der Saite deuten.