Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 6. November 2006

Analysis III

4. Tutorium

(T 1) Ein Beispiel

Wir betrachten die Schar konzentrischer Kreise in $\mathbb{R}^2$, welche implizit durch $x^2 + y^2 = r^2$, $(r > 0)$ gegeben sind.

(a) Stelle eine Differentialgleichung auf, welche die Kreislinien für $-r < x < r$ beschreibt.

(b) Welche Probleme treten auf, wenn man die gesamte Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ als Lösung einer Differentialgleichung schreiben will?

(T 2) Exakte Differentialgleichungen

(a) Suchen Sie eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß die Kreislinien aus obiger Aufgabe Niveaulinien von F sind und skizzieren Sie das Vektorfeld ∇F.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$ einer Niveaulinie von F an und skizzieren Sie deren Tangentialvektoren.

(c) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Tangentialvektoren $(\dot{x}, \dot{y})$ und dem Vektorfeld ∇F?

(d) Zeigen Sie, daß die Funktionen x und y der Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = 0$ genügen. Setzen Sie $x = t$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit T1 a)

(T 3) Exakte Differentialgleichungen II

Definition: Eine Differentialgleichung der Form $g(x, y)\dot{x} + h(x, y)\dot{y} = 0$ heißt *exakt*, wenn es eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ gibt.

Im folgenden sei $g(x, y)\dot{x} + h(x, y)\dot{y} = 0$ eine exakte Differentialgleichung mit $\frac{\partial F}{\partial x} = g$, $\frac{\partial F}{\partial y} = h$ und es gelte immer $(g(x, y), h(x, y)) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie, daß y genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0$ ist, wenn y eine Niveaulinie von F beschreibt.

(T 4) Eulersche Multiplikatoren

Wir betrachten die Differentialgleichung $y(x) + 2xy'(x) = 0$.

(a) Ist diese DGL exakt?

(b) Finden Sie eine differentierbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß die Differentialgleichung $\lambda(x, y(x))y(x) + \lambda(x, y(x))2xy'(x) = 0$ exakt ist.

Hinweis: Es gibt eine solche Funktion λ, welche in diesem Beispiel nur von einem Argument abhängt.

(c) Lösen sie nun die exakte DGL indem Sie T3 benutzen.