Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. November 2006

3. Tutorium zur Analysis III

Die Ungleichung von Gronwall und stetige Abhängigkeit von den Anfangwerten

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert (unter geeigneten Voraussetzungen) lokal eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(\#) \quad \begin{array}{llll} \dot{y} = f(t,y) & , & f : J \times D \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}\,, & J \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall} \\ y(t_0) = y_0 & , & (t_0, y_0) \in J \times D\,, & D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.} \end{array}$$

Für die Praxis ist es nun von eminenter Bedeutung, ob die Lösung y *stark* - vielleicht zu stark - variiert, wenn man die rechte Seite f und den Anfangswert y_0 nur *wenig* ändert.
Oder ist es nicht vielmehr so, dass y "stetig" von diesen Ausgangsdaten abhängt, *kleine* Änderungen von f und y_0 sich nur *geringfügig* auf y auswirken (man denke nur an Mess- und Idealisierungsfehler; wünschenswert ist, dass die *errechnete* Lösung nicht allzuweit von dem *realen* Vorgang abweicht).
Bei vielen Fragen der stetigen Abhängigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Anfangswerten und Parametern spielt folgende Ungleichung eine fundamentale Rolle.

Aufgaben

A 1 Ungleichung von Gronwall.
Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und seien $\varphi, \psi, w \in C(I)$ nicht-negative, stetige Funktionen auf I. Gilt

$$(*) \qquad w(t) \le \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) w(s) ds \right| \qquad \text{für alle } t \in I\,,$$

so folgt

$$(**) \qquad w(t) \le \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} \psi(\sigma) d\sigma \right| \right) ds \right|$$

für alle $t \in I$. Falls $t > t_0$, so können die Betragsstriche weggelassen werden. Wir wollen die Ungleichung von Gronwall beweisen. Gehe dazu wie folgt vor.

1. Betrachte zunächst den Fall $t > t_0$. Setze $v(t) := \int_{t_0}^{t} \psi(s)w(s)ds$ und zeige, dass
$$\frac{d}{dt} v(t) \le \varphi(t)\psi(t) + \psi(t)v(t)$$
gilt.
2. Folgere, dass
$$\frac{d}{dt}(\chi v) \le \varphi\psi\chi \quad \text{für} \quad \chi(t) := \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds \right)$$
gilt.
3. Folgere
$$v(t) \le \int_{t_0}^{t} (\varphi\psi)(s) \frac{\chi(s)}{\chi(t)} ds$$
und wende nun die Voraussetzung an.

4. Folgere das Resultat für $t < t_0$, indem Du jede der Funktionen $g = \varphi, \psi, w$ durch die an t_0 gespiegelte Funktion $\tilde{g}(t) := g(2t_0 - t)$ ersetzt.

A 2 **Folgerung 1 zur Gronwall Ungleichung**.
Beweise:
Gilt $\varphi(t) = \varphi_0(|t - t_0|)$, wobei $\varphi_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend sei, so folgt aus

$$(*) \qquad w(t) \leq \varphi(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) w(s) ds \right| , \quad t \in I ,$$

die Abschätzung

$$w(t) \leq \varphi(t) \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds \right| \right) , \quad t \in I.$$

A 3 **Folgerung 2 (stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten).**
Sei $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig und genüge bezüglich y einer Lipschitzbedingung

$$\|f(t, y) - f(t, y^*)\| \leq L\|y - y^*\|$$

bzüglich einer Norm $\| \cdot \|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in J \subset \mathbb{R}$, $y, y^* \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Zeige:
Sind dann $u : J_u \to D$ sowie $v : J_v \to D$ Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = f(t, y)$ (im Gegensatz zum AWP (#) verlangen wir hier nicht, daß $y(t_0)$ vorgegeben ist), so gilt für jedes $t_0 \in J_u \cap J_v$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t_0) - v(t_0)\| e^{L|t - t_0|}$$

für alle $t \in J_u \cap J_v$.
Tipp: Beachte, dass

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds$$

für eine Lösung u der Dgl. $\dot{y} = f(t, y)$ gilt.