Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 6. November 2006

Analysis III

2. Tutorium

(T 1) Vektorfelder und Richtungsfelder

Wir betrachten die DGL $y' = \tan y$.

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

(b) Ist obiges Richtungsfeld ein Vektorfeld? (Wenn ja, geben Sie die Abbildungsvorschrift an. Wenn nicht, wie können Sie daraus ein Vektorfeld machen?)

(c) Sind Vektorfelder immer Richtungsfelder oder Richtungsfelder immer Vektorfelder?

(d) Lösen Sie obige DGL durch Trennung der Variablen. Können Sie hier den Satz von Picard-Lindelöf anwenden?

(T 2) Vektorfelder und Differentialgleichungen

Wir betrachten die DGL $y'(x) = f(x, y(x)) = xe^{-y(x)}$.

(a) Wie können Sie eine Lösung dieser DGL als Integralkurve eines Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verstehen? (Eine *Integralkurve* γ zu einem Vektorfeld $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : (a, b) \to \Omega$, welche die Bedingung $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ erfüllt.) Wie läßt sich dieses Vektorfeld F durch die Funktion f beschreiben?

(b) Skizzieren Sie das Vektorfeld F und lösen Sie die DGL.

(T 3) Potentiale und Gradientenfelder

Wir betrachten das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x, y, z)$.

(a) Wann nennt man ein Vektorfeld ein Gradientenfeld? Ist das Vektorfeld V ein Gradientenfeld? Ist es rotationssymmetrisch oder ein Zentralfeld (d.h. $V(\vec{x}) = f(|\vec{x}|^2)\vec{x}$ für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)?

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial V_3}{\partial z}$. Ist die Funktion $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ein *Potential* d.h. gilt $\Delta F = 0$?

(c) Durch Transformation der DGL $\ddot{s}(t) = -V(s(t))$ in Kugelkoordinaten erhält man die DGL $\ddot{r}(t) = -\frac{1}{r(t)^2}$. Lösen Sie diese DGL mit dem Ansatz $r(t) = a \cdot (b \pm t)^c$ ($c \in \mathbb{N}$).

(T 4) Fluchtgeschwindigkeiten und schwarze Löcher

Die Bewegung eines Körpers der Masse m im Schwerefeld der Erde (mit Masse M_E) wird durch die Bewegungsgleichung $\ddot{s}(t) = -\frac{\gamma \cdot M_E}{\|s(t)\|^3}s(t)$ beschrieben. ($M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$kg, $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$) Die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Körpers ist die vertikale Geschwindigkeit, welche ein Körper an der Erdoberfläche haben muß, um nicht wieder herunterzufallen.

(a) Lösen sie die zugehörige DGL für den Abstand r zum Erdmittelpunkt und berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit $\dot{r}_F(0)$. (Erdradius $R_E = 636 \cdot 10^4$m)

(b) Welche Masse müßte die Erde nach dieser klassischen Rechnung haben, damit sie ein schwarzes Loch mit Schwarzschildradius R_E wäre? (d.h. $\dot{r}_F(0) = c = 299792458\text{ms}^{-1}$, $r_F(0) = R_E$.)