

1. Tutorium zur Analysis III

Aufstellen und lösen einfacher Differentialgleichungen

Aufgaben

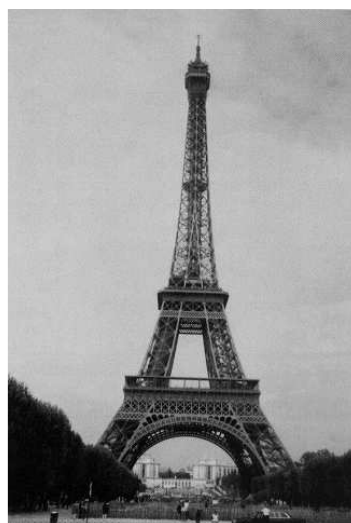
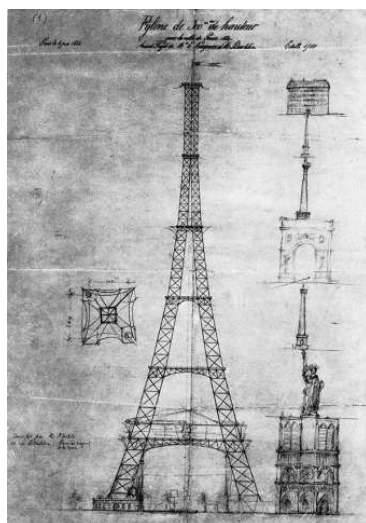
A 1 (Hinschwinden des Bierschaums)

Ein Glas Bier wird zur Zeit $t = 0$ frisch gezapft. Rührt man das Bier nicht an, so verringert sich das Volumen $V(t)$ des Bierschaums pro Zeit mit einer Rate, die proportional zum momentan vorhandenen Schaumvolumen ist. Stelle eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit t auf. Löse die Differentialgleichung.

A 2 (Säulenkonstruktion)

Eine Säule habe die Gestalt eines Rotationskörpers mit der nach unten gerichteten x -Achse als Rotationsachse. Der Nullpunkt der x -Achse liege am oberen Säulenende, wo der Säulenradius r_0 Meter betrage und auf welchem sich eine Nutzlast von $m_0 kg$ befinde. Die Massendichte des Säulenmaterials betrage $\rho kg/m^3$. Wie groß muss der Säulenradius $r(x)$ an der Stelle x gewählt werden, damit jeder (horizontale) Säulenquerschnitt pro Quadratmeter die selbe Belastung trägt.

Hinweis:



A 3 (Verfolgung eines U-Boots)

Der Kommandant eines Zerstörers entdeckt in 5 Seemeilen Entfernung ein feindliches U-Boot, das sofort abtaucht. Er fährt zunächst 4 Seemeilen gradlinig auf den Tauchpunkt zu. Dort wechselt er abrupt die Fahrtrichtung und schlägt nun einen raffinierten Kurs ein, der mit Sicherheit direkt über das U-Boot führen wird, egal in welche Richtung es sich fortbewegt. Hierbei wird angenommen, dass sich das U-Boot gradlinig (in unbekannter Richtung) mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die Geschwindigkeit des Zerstörers sei dem Betrage nach konstant und viermal so groß wie die des U-Boots.

Welchen Weg schlägt der Zerstörer 1 Seemeile vom Abtauchpunkt entfernt ein? Gib die Fahrtkurve an. Gibt es mehr als eine Möglichkeit? Ist der geforderte Bewegungsablauf physikalisch realisierbar?

Hinweis: Beschreibe die Position $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ des Zerstörers zur Zeit t durch Polarkoordinaten $\phi(t)$, $r(t)$, wobei 0-Punkt=Tauchpunkt und x -Achse=Halbgerade vom Tauchpunkt zur anfänglichen Position des Zerstörers. Wie groß muss $r(t)$ sein, damit man zu jedem Zeitpunkt die Chance hat, das U-Boot zu erwischen.