Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 2. Februar 2007

Analysis III

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Klassifizieren isolierter Singularitäten

Bestimmen und klassifizieren sie die Singularitäten folgender Funktionen (definiert auf dem jeweils naheliegenden Definitionsbereich):

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ (b) $g(z) = \frac{z}{\sin z}$ (c) $h(z) = \sin \frac{1}{z}$

Lösung:

(a) Da die Funktion f stetig auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist (mit $f(0) = 1$), hat sie bei 0 eine hebbare Singularität.

(b) Da die Funktion f aus (a) bei 0 den Wert 1 annimmt, hat $g = \frac{1}{f}$ bei 0 eine hebbare Singularität und für die Fortsetung g folgt $g(0) = 1$. Die Nullstellenmenge des Nenners sin ist $\pi\mathbb{Z}$. Weil der Sinus eine 2π-periodische Funktion ist, hat die Funktion $\frac{z(z-2\pi k)}{\sin z} = zg(z - 2\pi k)$ an der Stelle $2\pi k$ eine hebbare Singularitat mit Wert $2\pi k$ an dieser Stelle. Somit hat g dort einen Pol 1. Ordnung. Für die Stellen $(2k+1)\pi$ gilt $\sin((2k+1)\pi) = -\sin(2k\pi)$. Daher hat g auch an diesen Stellen einen Pol 1. Ordnung.

(c) Die Laurentreihe von h um 0 lautet $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$. Daher hat h nur bei 0 eine Singularität und diese ist wesentlich.

Aufgabe G2 Entwickeln in Laurentreihen

Finden Sie alle maximalen Kreisringe um 0 in denen sich die Funktion

$$f(z) = \frac{5 - 2i}{z^2 - (5 + 2i)z + 10i}$$

(definiert auf dem naheliegenden Definitionsbereich) in Laurentreihen entwickeln läßt und geben Sie diese Laurentreihen an.

Lösung:

Zerlegt man das Polynom im Nenner in seine Linearfaktoren, so erhält man

$$f(z) = \frac{5 - 2i}{z^2 - (5 + 2i)z + 10i} = \frac{5 - 2i}{(z - 5)(z - 2i)} = \frac{1}{z - 5} - \frac{1}{z - 2i}$$

Die Funktion f hat bei $2i$ und 5 isolierte Singularitäten. Die maximalen Kreisringe auf denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann sind daher $B_2(0)$, $K_0(2, 5)$ und $K_0(5, \infty)$.

Für $z \in B_2(0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2i} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{z}{5}} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z}{2i}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{(2i)^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

Für $z \in K_0(2,5)$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2i} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{z}{5}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2i}{z}} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}z^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2i)^{n-1} z^{-n} \end{aligned}$$

Analog folgt für $z \in K_0(5,\infty)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2i} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{5}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2i}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}5^n z^{-n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{n-1} - (2i)^{n-1}\right) z^{-n} \end{aligned}$$

Aufgabe G3 Was ist hier los?

Widerspricht die folgende Identität dem Entwicklungssatz für Laurentreihen?

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$$

LÖSUNG:

Die Identität gilt nur für $|z| < 1$ und $|\frac{1}{z}| < 1$, also auf der leeren Menge.

Aufgabe G4 Reelle uneigentliche Integrale

Es sei $R \in \mathbb{R}$, $\gamma_R : I \to \mathbb{C}$ der Weg $t \mapsto 2tR - R$ von $-R$ nach R und $\gamma_R' : I \to \mathbb{C}$ der Kreisbogen $t \mapsto Re^{i\pi t}$.

(a) Machen Sie sich eine Skizze der Wege.

(b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_R'} \frac{1}{1+z^2} dz$ für $R > 1$.

(c) Wie groß kann der Betrag $\left|\frac{1}{1+z^2}\right|$ auf γ_R' höchstens werden? Wie lang ist der Weg γ_R'?

(d) Berechnen Sie $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'_R} \frac{1}{1+z^2} dz$

(e) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

LÖSUNG:

(a)

(b) $\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{\gamma'_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$ für $R > 1$

(c) $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$ auf γ'_R. Die Weglänge beträgt πR.

(d) $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$.

Aufgabe G5 Residuenkalkül

Bestimmen Sie folgende reelle Integrale mit Hilfe der Funktionentheorie:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2+a^2} dx$ für $a > 0$.

Hinweis: Benutzen Sie $\cos x = \text{Re } e^i x$.

LÖSUNG:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left((\frac{-1+i}{4\sqrt{2}}) + (\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2+a^2} dx = \text{Re } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^i x}{(x-\frac{\pi}{4})^2+a^2} dx = \text{Re } 2\pi i \left(\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+ia)}}{2ai} \right) = \text{Re } e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\pi e^{-a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi e^{-a}}{a}$ für $a > 0$

Hausübungen

Aufgabe H1 Reelle uneigentliche Integrale

Es sei $R \in \mathbb{R}$, $\gamma_R : I \to \mathbb{C}$ der Weg $t \mapsto t$ von 0 nach $\mathbb{R}$und $\gamma'_R : I \to \mathbb{C}$ der Weg $t \mapsto (1-t)Re^{\frac{2\pi i}{3}}$.

(a) Machen Sie sich eine Skizze der Wege.

(b) Beweisen Sie $\int_{\gamma'_R} \frac{1}{1+z^3} dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^3} dz$.

(c) Berechnen Sie $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$.

Hinweis: Welchen Beitrag liefert der fehlende Kreisbogen?

LÖSUNG:

(a)

(b) Mit $\gamma'_R(t) = (1-t)Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'_R} \frac{1}{1+z^3} dz &= \int_0^1 \frac{-Re^{\frac{2\pi i}{3}}}{1+(tRe^{\frac{2\pi i}{3}})^3} dt \\ &= \int_0^1 \frac{-Re^{\frac{2\pi i}{3}}}{1+t^3R^3} dt \\ &= -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^3} dz. \end{aligned}$$

(c) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}} 2\pi i \frac{1}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (Der fehlende Kreisbogen liefert keinen Beitrag.)

Aufgabe H2 Meromorphe Funktionen

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf dem Gebiet Ω.

(a) Zeigen Sie, daß die Vereinigung von zwei abgeschlossenen diskreten Mengen in Ω wieder diskret ist.

(b) Beweisen Sie, daß die Summe $f + g$ zweier meromorpher Funktionen f und g auf Ω wieder meromorph ist.

(c) Zeigen Sie, daß auch $\frac{1}{f}$ eine meromorphe Funktion auf Ω ist, falls f nicht konstant verschwindet.

LÖSUNG:

(a) Es seien $A, B \subset \Omega$ abgeschlossen und diskret. Da die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist, ist auch $A \cup B$ abgeschlossen (in Ω). Hätte die Menge $A \cup B$ einen Häufungspunkt, so müßte entweder A oder B einen Häufungspunkt haben. Dies wiederspricht jedoch der Annahme, daß sowohl A als auch B abgeschlossen und diskret sind.

(b) Sind f und g zweier meromorphe Funktionen auf Ω, dann sind die Polstellenmengen $P(f)$ und $P(g)$ abgeschlossen und diskret in Ω. Weiterhin gilt $P(f + g) \subset P(f) \cup P(g)$. Nach (b) ist Daher die Polstellenmenge von $f + g$ diskret und somit $f + g$ eine meromorphe Funktion auf Ω.

(c) Wenn f nicht konstant verschwindet, dann ist die Nullstellenmenge abgeschlossen und diskret. Da die Polstellenmenge $P(\frac{1}{f})$ genau die Menge $f^{-1}(0)$ ist (Warum?), ist die Funktion $\frac{1}{f}$ meromorph auf Ω.