12. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Isolierte Singularitäten)
Bestimme und klassifiziere die Singularitäten folgender Funktionen:

(a) $f(z) := \frac{\cos z}{z}$,
(b) $g(z) := \frac{z^2}{(e^z-1)^2}$,
(c) $h(z) := \sin(\frac{1}{z})\cos(\frac{1}{z})$.

(a) Die Funktion f hat eine Singularität in 0, und es ist

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Also liegt ein Pol der Ordnung 1 vor.

(b) Die Funktion g hat Singularitäten in $2\pi i\mathbb{Z}$. Es ist

$$g(z) = \left(\frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}\right)^2.$$

Also lässt sich g in 0 durch 1 holomorph fortsetzen, in 0 liegt eine hebbare Singularität vor. Sei $z_0 = 2\pi i n_0$ mit $n_0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Es ist $e^z = e^{z-2\pi i n_0+2\pi i n_0} = e^{z-2\pi i n_0}e^{2\pi i n_0} = e^{z-2\pi i n_0}$. Daraus folgt

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^2 = \left(\frac{z}{e^{z-2\pi i n_0}-1}\right)^2 = \left(\frac{z(z-2\pi i n_0)}{(z-2\pi i n_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2\pi i n_0)^n}{n!}}\right)^2$$
$$= \left(\frac{z}{z-2\pi i n_0}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2\pi i n_0)^{n-1}}{n!}}\right)^2.$$

Wegen $\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2\pi i n_0)^{n-1}}{n!} = 1$ ist z_0 ein Pol der Ordnung 2.

$$\lim_{z\to z_0}(z-2\pi i n_0)^2 g(z) = \lim_{z\to z_0}(2\pi i n_0)^2,$$

also ist z_0 ein Pol der Ordnung 2.

(c) Die Funktion h hat eine Singularität in 0. Mit dem Additionstheorem folgt

$$h(z) = \frac{1}{2}\sin\frac{2}{z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{2}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

also liegt eine wesentliche Singularität vor.

A 2 (Laurentreihen) (4 Punkte)

(a) Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z},$$

und bestimme deren maximalen Definitionsbereich. Wo ist f holomorph? Entwickle f um 0 in eine Laurentreihe.

(b) Zeichne Kreisringe um $\frac{1}{3}$, auf denen f holomorph ist. Sei

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\left(z-\frac{1}{3}\right)^{-k}$$

der Hauptteil der Laurentreihe von f auf dem Kreisring, welcher $1+i$ enthält. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe von $g\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}\right)$?

(a) *Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{C}\backslash\{0,1,2\}$ und f ist dort holomorph als Quotient holomorpher Funktionen. Um die Laurentreihe zu bestimmen, verwenden wir Partialbruchzerlegung.*

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Also folgt

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+3}}\right)z^{n+1}.$$

(b) *Es gilt $|\frac{1}{3}-1-i|^2 = \frac{4}{9}+1 = \frac{8}{9} > (\frac{2}{3})^2$. Also geht es um den Kreisring $\{z\in\mathbb{C} \mid \frac{2}{3} < |z-\frac{1}{3}| < \frac{4}{3}\}$. Also ist der Hauptteil g für $|z-\frac{1}{3}| > \frac{2}{3}$ holomorph. Das heißt die Reihe für $g\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3}\right)$ konvergiert für $\left|(\frac{1}{z}+\frac{1}{3})-\frac{1}{3}\right| > \frac{2}{3}$, also für $|z| < \frac{3}{2}$.*

A 3 **(Noch mehr Laurentreihen)** (3 Punkte)
Gib den Hauptteil der Laurentreihe der Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z) := \frac{e^z\cos z}{z^2}$ um 0 an, und berechne das Integral

$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$

Da $e^0\cos 0 = 1$ gilt, hat die Funktion f einen Pol zweiter Ordnung in 0. Wenn wir die ersten zwei Koeffizienten der Potenzreihe von $g(z) = e^z\cos z$ um 0 bestimmen, sind wir fertig, denn diese entsprechen gerade den ersten beiden Gliedern der Laurentreihe von f um 0. Es ist $g(0) = 1$ und wegen $g'(z) = e^z\cos z - e^z\sin z$ ist $g'(0) = 1$. Nun folgt aus dem Entwicklungssatz von Laurent (Satz 4.4)

$$2\pi i = 2\pi i a_{-1} = \int_{|z|=1} f(z)dz.$$

A 4 **(Und noch mehr Laurentreihen)** (4 Punkte)
Die Funktion f sei holomorph in $z_0\in\mathbb{C}$. Der Punkt z_0 wird eine k-fache Nullstelle von f genannt, wenn für die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 gilt:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{mit } c_k \neq 0.$$

Zeige, dass f genau dann eine k-fache Nullstelle in z_0 hat, wenn $\frac{1}{f}$ in z_0 einen Pol k-ter Ordnung hat.

Ist z_0 eine k-fache Nullstelle von f, so gilt für die Potenzreihenentwicklung um z_0

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-z_0)^n = (z-z_0)^k g(z),$$

wobei

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-z_0)^n$$

wegen $c_k \neq 0$ eine holomorphe Funktion ist, die keine Nullstelle in z_0 besitzt. Also hat die (wegen der Stetigkeit von g auf $V\setminus\{z_0\}$ für eine offene Umgebung V von z_0 wohldefinierte) Funktion $\frac{1}{f} = (z-z_0)^{-k}\frac{1}{g(z)}$ einen Pol k-ter Ordnung.
Sei nun z_0 ein Pol k-ter Ordnung der Funktion $g := \frac{1}{f}$ (Die Funktion ist wohldefiniert auf $V\setminus\{z_0\}$ für eine offene Umgebung von z_0, da die Nullstellen von f nach dem Identitätssatz isoliert sind und

f nicht die Nullfunktion ist.
Nach Definition besitzt eine Funktion g genau dann einen Pol k-ter Ordnung in z_0, wenn die Laurentreihe von g in einer Umgebung um z_0 die Gestalt

$$g(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_{-k} \neq 0$$

hat. Also ist $g(z) = (z - z_0)^{-k} h(z)$ mit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z - z_0)^n$. Als Potenzreihe ist h in einer Umgebung von z_0 holomorph. Man beachte, dass wegen $a_{-k} \neq 0$ auch $h(z_0) \neq 0$ gilt. Also ist

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^k \frac{1}{h(z)}$$

holomorph in einer Umgebung von z_0 mit einer k-fachen Nullstelle in z_0.

A 5 **(Eine Kurve zersägt den Raum)** (4 Punkte)
Sei $r : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ stetig mit $r(0) = r(2\pi)$ und sei eine Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := r(t)e^{it}$.

Zeige, dass

$$\mathbb{C} \setminus \{\gamma(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = A \cup B,$$

wobei A und B disjunkt und jeweils offen und wegzusammenhängend sind. Weiterhin ist A beschränkt und B unbeschränkt.

Sei

$$A := \{z = Re^{i\phi} \mid R < r(\phi)\} \quad \textit{und} \quad B := \{z = Re^{i\phi} \mid R > r(\phi)\}$$

Wir zeigen, dass A und B die Anforderungen erfüllen.

- *A und B sind disjunkt: Klar.*
- *$\mathbb{C} \setminus \{\gamma(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} = A \cup B$ ist auch klar.*
- *A ist wegzusammenhängend: Stimmt, weil offenbar A sternförmig zum Ursprung $z = 0$ ist.*
- *A ist beschränkt: r ist stetig auf der kompakten Menge $[0, 2\pi]$, also hat es ein Maximum. Sei $M := \max\{r(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} + 1$. Dann gilt $|z| < M$ für alle $z \in A$.*
- *B ist wegzusammenhängend. Seien $z_1 = R_1 e^{i\phi_1}, z_2 = R_1 e^{i\phi_1} \in B$. Wir definieren $\gamma_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $k = 1, ..., 3$ durch*

  $$\gamma_1(t) = [(1 - t)R_1 + tM]e^{i\phi_1}, \quad \gamma_3(t) = [tR_2 + (1 - t)M]e^{i\phi_2} \quad \gamma_2(t) = Me^{(1-t)\phi_1 i + t\phi_2 i}.$$

  Diese Wege liegen immer in B. Setzt man die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 aneinander, so erhält man einen Weg von z_1 nach z_2.
- *A ist offen: Sei $z = Re^{i\phi} \in A$. Dann gilt $R < r(\phi)$, sei $\varepsilon := \frac{r(\phi) - R}{2}$. Dann gibt es eine Umgebung $(\phi - \delta, \phi + \delta)$ von ϕ, so dass*

  $$r(\zeta) > r(\phi) - \varepsilon = R + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad (\phi - \delta, \phi + \delta).$$

  Also gilt $\{r\phi^{i\rho} \mid 0 < r < R + \varepsilon, \ \rho \in (\phi - \delta, \phi + \delta)\} \subset A$.
- *B ist offen: Analog.*