Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 2. Februar 2007

Analysis III

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Holomorphie

Nenne 5 äquivalente Charakterisierungen Holomorphie auf Sterngebieten.

LÖSUNG:

Ist G ein Sterngebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf G, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f ist komplex differenzierbar.
2. Für jedes Dreieck $\Delta \in G$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$
3. Für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$
4. Es gibt eine Stammfunktion.
5. Die Funktion f ist analytisch, d.h. um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar.

Aufgabe G2 Konvergenzradius von Taylorreihen

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ferner sei $a \in \Omega$ und $B_R(a)$ die größte offene Kreisscheibe um a, die noch ganz in Ω enthalten ist.

(a) Zeige: Ist f auf $B_R(a)$ unbeschränkt, dann ist R gleich dem Konvergenzradius der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt a.

(b) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihen der folgenden komplexen Funktionen um $z = 0$:

$$(i) \quad f(z) = \tfrac{1}{z+i} \qquad (ii) \quad f(z) = \tfrac{1}{1+z+z^2} \qquad (iii) \quad f(z) = \tfrac{1}{\cos z}$$

LÖSUNG:

(a) Nach dem Entwicklungssatz läßt sich f in eine Potenzreihe (=Taylorreihe) auf $B_R(a)$ entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad z \in B_R(a).$$

Daraus folgt, dass der Konvergenzradius r der Reihe größer gleich R ist. Da aber f auf $B_R(a)$ unbeschränkt ist, muss $r = R$ sein (da aus der Unbeschränktheit folgt, dass $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ für $|z-a| \geq R$ divergent ist).

(b) (i) $F : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph $\Rightarrow R = 1$. Da f auf $B_1(0)$ unbeschränkt ist, folgt aus (a), dass $r = R = 1$.
(ii) $1 + z + z^2$ hat die Nullstellen $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\sqrt{3}, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{3}\sqrt{3} \Rightarrow f$ ist auf $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2\}$ holomorph. Da $|z_1| = |z_2| = 1$ ist, folgt, dass $R = 1$. Da ferner f auf $B_1(0)$ unbeschränkt ist, folgt aus (a), dass $r = R = 1$.
(iii) Nullstellen von $\cos z$: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1$, d.h. $z_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ sind alle Nullstellen des komplexen Cosinus. Daraus folgt, dass f auf $\mathbb{C}\backslash\{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ holomorph ist, also $R = \frac{\pi}{2}$. Aus der Unbeschränktheit von f auf $B_{\frac{\pi}{2}}$ folgt wiederum, dass $R = r = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe G3 Minimumsprinzip

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine holomorphe Funktion auf G, die nicht konstant ist. Beweisen Sie:

(a) Hat die Funktione $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so gilt $f(z_0) = 0$.

(b) Ist f auf G nullstellenfrei, das Gebiet G beschränkt und $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f, so nimmt $|\tilde{f}|$ sein Minimum auf dem Rand ∂G an.

(c) Jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

LÖSUNG:

(a) Wäre $f(z_0) \neq 0$, so hätte f auf einer offenen Umgebung U von z_0 keine Nullstelle. Dann wäre $g : U \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ holomorph, und der Betrag von g hätte in z_0 ein lokales Maximum, was dem Maximumprinzip widerspricht (da mit f auch g nicht konstant ist, als Folgerung des Identitätssatzes)

(b) Wenn $\tilde{f}$ Nullstellen hat, dann liegen diese per Voraussetzung auf ∂G, und $|\tilde{f}|$ wird dort minimal. Andernfalls ist $1/\tilde{f}$ stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G, so dass $\left|1/\tilde{f}\right|$ nach dem Maximumprinzip in einem $z_0 \in \partial G$ sein Maximum annimmt. Dann wird $|\tilde{f}|$ in z_0 minimal.

(c) s sei p ein komplexes Polynom, dessen Grad mindestens 1 ist. Gilt $p(0) = 0$, so hat p die Nullstelle 0. Andernfalls verwenden wir Lemma 3.5: Es gibt ein $R > 0$ derart, dass für alle $|z| \geq R$ stets
$$|p(z)| \geq 2|p(0)|$$
gilt. Die Funktion $|p|_{\overline{U_R(0)}}|$ nimmt ihr Minimum also nicht auf $\partial\overline{U_R(0)}$ an. Nach (b) muss p in $U_R(0)$ eine Nullstelle haben.

Aufgabe G4 Cauchy-Integralsatz

Bestimme folgende Integrale:

(a) $\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z^2-1}dz$

(b) $\int_{|z|=3\sqrt{\pi}} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$

LÖSUNG:

(a)

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+1} + \frac{\sin-\frac{\pi}{2}}{-1-1}\right) = 2\pi i$$

(b)

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} + \frac{e^1}{-2i} \right) = -2\pi \cos 1$$

Aufgabe G5 Niveaumengen

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{C}$ die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ keinen Häufungspunkt in Ω haben kann.

(b) Beweisen Sie, daß alle Niveaumengen nicht konstanter holomorpher Funktionen auf Ω sogar abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$ sind.

LÖSUNG:

(a) Wenn die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ einen Häufungspunkt in Ω hätte, so würde nach dem Identitätssatz $f = a$ gelten. Da f nicht konstant ist, kann $f^{-1}(a)$ keinen Häufungspunkt in Ω haben.

(b) Da $f^{-1}(a)$ keinen Häufungspunkt in Ω hat, gibt es für jedes $z \in f^{-1}(a)$ eine offene Umgebung $U(z)$ welche die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ nur in z schneidet:$U(z) \cap f^{-1}(a) = z$. Da das Gebiet Ω per Definitionem offen ist, ist $U(z)$ auch offen in $\mathbb{C}$. Somit ist die Niveaumenge $f^{-1}(a)$ diskret in $\mathbb{C}$.

Hausübungen

Aufgabe H1 Die Exponentialfunktion

Beweisen Sie $\exp(w+z) = \exp w \exp z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Holomorphieohne der Exponentialfunktion ohne Benutzung der Potenzreihe.

Hinweis: Sie können für festes w Funktion $z \mapsto \exp(w+z)$ betrachten.

LÖSUNG:

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(w+z)$ ist holomorph. Weiterhin gilt $f' = f$ und $f'(0) = \exp w$. Somit folgt $f(z) = c \exp(z)$ mit $c = \exp w$.

Aufgabe H2 Involutionen auf $\mathcal{O}(G)$

Es sei G ein unter der komplexen Konjugation invariantes Gebiet (d.h. $\overline{G} = G$).

(a) Zeigen Sie, daß für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ auch die Funktion

$$f^* : G \to \mathbb{C}, \quad f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

holomorph ist.

(b) Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie, daß die Gleichung $f^* = f$ erfüllt ist, falls f auf $G \cap \mathbb{R}$ reell ist. Gilt auch die Umkehrung?

(c) Zeigen Sie, daß die Abbildung $* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ eine antilineare Involution ist (d.h. daß $(\lambda f + g)^* = \overline{\lambda} f^* + g^*$ für alle $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt).

LÖSUNG:

(a) Es sei $z \in G$. Weil somit auch $\overline{z} \in G$ gilt, folgt

$$\frac{f^*(z+h) - f^*(z)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\frac{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}}.$$

Da der Grenzwert der Rechten Seite für $\overline{h} \to 0$ existiert, ist die Funktion f^* differenzierbar in z.

(b) Da die holomorphen Funktionen f und f^* auf der Menge $G \cap \mathbb{R}$ übereinstimmen, müssen sie nach dem Identitätssatz gleich sein.

(c) Nachrechnen!

Aufgabe H3 Satz von Liouville

Beweisen Sie, daß das Bild einer ganzen Funktion f, welche nicht konstant ist, dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (Zur Erinnerung: Eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt *ganz*.)

LÖSUNG:

Wir nehmen an, daß das Bild $f(\mathbb{C})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Es gibt also einen Punkt c und eine Umgebung U_ϵ von c mit $f(\mathbb{C}) \cap U_\epsilon = \emptyset$. Somit ist $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$ eine ganze Funktion. Aus $\left|\frac{1}{f(z)-c}\right| \leq \frac{1}{\epsilon}$ folgt die Beschränktheit von g. Daher sind g und somit auch f konstant, im Widerspruch zur Annahme!