10. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Identitätssatz)** (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Wir zeigen, dass die Funktion $\overline{f(\overline{z})}$ auch holomorph ist.

$$\frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} \xrightarrow{h\to 0} \overline{f'(\overline{z})}.$$

Also ist $\overline{f(\overline{z})}$ holomorph und offenbar gilt $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ für $z \in \mathbb{R}$ wegen der Voraussetzung an f. Da die Menge $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt hat, folgt nach dem Identitätssatz $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung das konjugiert komplexe, so folgt die Behauptung.

A 2 **(Reell-analytische Funktionen)** (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. f heißt reell-analytisch, wenn zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$ gegen f konvergiert. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist reell analytisch.

(ii) Es gibt ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $I \subset G$ und ein holomorphes $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F|_I = f$.

"(ii)$\Rightarrow$(i)": Gilt nach dem Entwicklungssatz.
"(i)$\Rightarrow$(ii)": Sei $x_0 \in I$ und die Taylorreihe konvergiere auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$ gegen f. Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Da $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta^n$ eine Nullfolge ist, konvergiert für $z \in B_{\delta(x_0)}(x_0) \subset \mathbb{C}$, die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\delta^n \left(\frac{z-x_0}{\delta}\right)^n.$$

Weil die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist, ist $G := \bigcup_{x_0 \in I} B_{\delta(x_0)}(x_0)$ offen. Auf G definieren wir die Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n, \quad \textit{falls } z \in B_{\delta(x_0)}(x_0).$$

Wir müssen zeigen, dass F wohldefiniert ist. Sei $z \in B_{\delta(y_0)}(y_0) \cap B_{\delta(x_0)}(x_0)$. Für $x \in B_{\delta(y_0)}(y_0) \cap B_{\delta(x_0)}(x_0) \cap \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(x-y_0)^n.$$

Also stimmen die beiden Reihenwerte auf $B_{\delta(y_0)}(y_0) \cap B_{\delta(x_0)}(x_0) \cap \mathbb{R}$ überein (was natürlich einen Häufungspunkt hat) und beide sind Potenzreihen und somit holomorph. Nach dem Identitätssatz folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(z-y_0)^n$$

und F is wohldefiniert. Nach Satz 1.4 ist F auf G holomorph. Nach Konstruktion gilt $F|_I = f$.

A 3 **(Potenzreihen)** (3 Punkte)
Beweise, dass man die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus (2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}$$

stetig nach 0 fortsetzen kann und dass man diese fortgesetzte Funktion in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln kann. Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

Man hat

$$|1-\cos z| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{(2k)}\right| = |z|^2 \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{(2k-2)}\right| \geq c|z|^2$$

für $|z| < \delta$ und geeignetes c, weil die stetige Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{(2k-1)}$ in 0 gleich $-\frac{1}{2}$ ist, das heißt, es gibt eine Umgebung, in der sie zum Beispiel $< -\frac{1}{4}$ bleibt.

Also hat man $|f(z)| \leq \frac{|z^2|}{c|z^2|} = \frac{1}{c}$ für $|z| < \delta$. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz kann man folglich f auch in 0 zu einer holomorphen Funktion fortsetzen. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash(2\pi(\mathbb{Z}\backslash 0))$. Nach Satz 2.15 ist folglich der Konvergenzradius 2π.

A 4 **(Eine Reihe)** (3 Punkte)

Sei $B_1(0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius 1 um 0 und $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeige: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$

konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von $B_1(0)$ gleichmäßig.

Hinweis: Verwende die Definition der komplexen Differenzierbarkeit mit Differenzenquotienten.

Sei $K \subset B_1(0)$ kompakt und $M_1 = \max_{x\in K} |x|$. Da K kompakt ist, gilt $M_1 < 1$. Weil f holomorph ist, gilt für $|z| < M_2$ mit geeignetem $M_2 < 1$, $M_2 < M_1$

$$\left|\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| - |f'(0)|\right| \leq \left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0} - f'(0)\right| < 1.$$

Es folgt $|f(z)| < (1+|f'(0)|)|z|$ für alle z mit $|z| < M_2$. Außerdem gibt es ein n_0 mit $M_1^{n_0} < M_2$. Für $n \geq n_1 > n_0$ hat man $|z^n| \leq M_1^{n_0} < M_2$ und somit

$$\left|\sum_{n=n_1}^{\infty} f(z^n)\right| \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} |f(z^n)| \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} (1+|f'(0)|)|z|^n \leq (1+|f'(0)|) \sum_{n=n_1}^{\infty} M_1^n \xrightarrow{n_1\to\infty} 0.$$

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig.

A 5 **(Identitätssatz)** (3 Punkte)

Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und für jedes $z \in B_1(0)$ gebe es ein $n_z \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n_z)}(z) = 0$. Zeige, dass f ein Polynom ist.

Hinweis: Die Menge $A_n := \{z \in B_{\frac{1}{2}}(0) \mid f^{(n)}(z) = 0\}$ enthält für ein n unendlich viele Elemente.

Angenommen, die Menge A_n hätte für jedes n nur endlich viele Elemente. Dann wäre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ abzählbar. Nach Vorraussetzung gilt aber

$$B_{\frac{1}{2}}(0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n,$$

was natürlich überabzählbar ist. Widerspruch, das heißt es gibt ein n_0, für das A_{n_0} unendlich viele Elemente hat. Weil $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$ kompakt ist, hat dieses A_{n_0} einen Häufungspunkt in $B_1(0)$.

Weil aus dem Entwicklungssatz sofort folgt, dass $f^{(n_0)}$ auch holomorph ist, folgt $f^{(n_0)} \equiv 0$. Also ist f ein Polynom vom Grad $\leq n_0 - 1$.