Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006 12. Januar 2007

Analysis III

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Kurvenintegrale/Cauchysche Integralformel

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale

(i) $\int_{|z|=1} \overline{z} dz$ (ii) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$ (iii) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$ (iv) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz$

(b) Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher von 1 nach πi führt. Berechnen Sie $\int_\gamma ze^z dz$.

Lösung:

(a)
1. $\int_{|z|=1} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ite^{it} dt = 2\pi i$
2. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z-2i)(z+2i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}$
3. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \frac{-2}{(2i+2i)^3} = \frac{\pi}{16}$
4. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz = \int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)(z-3)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{-1-3} = \frac{-\pi}{2}$

(b) Da $f(z) = ze^z - e^z$ eine Stammfunktion zu ze^z ist, folgt $\int_\gamma ze^z dz = \int_\gamma f'(z) dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \pi i e^{\pi i} - e^{\pi i} - 1e^1 + e^1 = (\pi i - 1)(-1) = 1 - \pi i$.

(G 2) Cauchysche Integralformel

Es seien $G := \mathbb{C} \setminus [0,1]$ und $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Zeigen Sie, daß $\int_\gamma f(z) dz = 0$ für alle geschlossene Wege γ in G gilt.

Lösung:

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ ist sogar auf $G' := \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ holomorph. Wir beweisen die Aussage für einen Weg, welcher $[0,1]$ einmal umrundet. Die allgemeine Behauptung folgt dann aus diesem Fall. Ist γ ein Weg, welcher $[0,1]$ einmal umrundet, so ist γ homotop zum Hintereinanderauslaufen zweier Wege γ_1 und γ_2 in $G_1 = \{z \in G \mid \mathrm{Rz} < 1\}$ bzw. $G_2 = \{z \in G \mid \mathrm{Rz} < 0\}$, welche jeweils 0 und 1 einmal umrunden. Aus der Cauchy-Integralformel folgt somit

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\
&= \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)(z-0)} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-0)(z-1)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(-1)} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1)} = 0
\end{aligned}$$

(G 3) Rechnen mit holomorphen Funktionen

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : B_1(1) \to \mathbb{C}$ mit $f(B_1(1)) \subset \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, für die $f + f'' = 0$ gilt.

(c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, welche die Gleichung $f = f'$ erfüllen.

(d) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f, für die $(f^2)' = -2f$ gilt.

LÖSUNG:

(a) Da der Imaginärteil einer solchen Funktion f verschwindet und die Cauchy-Riemannschen DGln erfüllt sein müssen ist f konstant.

(b) Jede solche Funktion f ist in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entwickelbar. Aus der Cauchy-Inetgralformel folgt dann $(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n$. Die einzigen Möglichkeiten sind $f(z) = c_1 e^{iz}$ und $f(z) = c_1 e^{-iz}$.

(c) Jede solche Funktion f ist in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entwickelbar. Aus $f = f'$ folgt $(n+1)a_{n+1} = a_n$. Die einzigen Lösungen sind vielfaches der Exponentialfunktion $f(z) = ce^z$.

(d) Aus $(f^2)' = -2f'$ folgt $2ff' = -2f$ bzw. $ff' = -f$. Wir entwickeln f in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ist dies nicht die Nullfunktion, so erhalten wir $a_1 = -1$ und $a_n = 0$ sonst, d.h. $f(z) = -z$.

(G 4) Exponentialfunktion

Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

(a) Geben Sie das Bild der Exponentialfunktion an. Bestimmen Sie die Bilder der Geraden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{const}$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{const}$ und fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Finde alle maximalen Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf denen die Exponentialfunktion holomorph bzw. injektiv ist und gib deren Bild an.

LÖSUNG:

(a) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Geraden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{const}$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{const}$ werden auf konzentrische Kreise um den Ursprung bzw. auf Ursprungsgeraden abgebildet.

(b) Die Exponentialfunktionen ist auf genau den Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ mit $2\pi ik + M \cap M = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ injektiv. Für jede maximale dieser Mengen M gilt $\exp(M) = \mathbb{C}^\times$. Weiterhin ist die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

(G 5) Die Cayleyabbildungen

Wir betrachten die offene obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(a) Beweisen Sie, daß die Cayleyabbildung $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die Halbebene $\mathbb{H}$ in die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|) < 1\}$ abbildet.

(b) Beweisen Sie, daß die Cayleyabbildung $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ in die die obere Halbebene $\mathbb{H}$ abbildet.

(c) Zeigen Sie, daß die obigen Abbildungen invers zueinander sind.

LÖSUNG:

(a) Für $y > 0$ gilt $(y-1)^2 < (y+1)^2$ bzw. $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ und somit $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$.

(b) Wir berechnen den Imaginärteil von $i\frac{1+z}{1-z}$:

$$\operatorname{Im} i\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Re} \frac{(1+z)(\overline{1-z})}{(1-z)(\overline{1-z})} = \operatorname{Re} \frac{1+z-\overline{z}-z\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-z\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

Aus $|z| < 1$ folgt somit $\operatorname{Im} i\frac{1+z}{1-z} > 0$.

(c) Es gilt $i\frac{1+\frac{z-i}{z+i}}{1-\frac{z-i}{z+i}} = i\frac{z+i+z-i}{z+i-(z-i)} = i\frac{2z}{2i} = z$. Die andere Richtung sieht man analog.

Hausübungen

(H 1)

Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe um 0

(a) $z \mapsto \exp(z+\pi i)$ (b) $z \mapsto \sin^2 z$, $(\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(z) - \exp(-z))$ (c) $z \mapsto \cos(z^2 - \pi)$

LÖSUNG:

1. $z \mapsto \exp(z+\pi i) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$
2. $z \mapsto \sin^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2(2n+1)} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{4n}$
3. $\cos(z^2 - \pi) = -\cos(z^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}$

(H 2) Der komplexe Logarithmus

Wir betrachten nun lokale Umkehrfunktionen zur Exponentialfunktion:
Definition: Eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G heißt *Logarithmusfunktion* in G, falls $\exp(l(z)) = z$ für alle $z \in G$ gilt.

(a) Finde ein möglichst großes Gebiet G auf dem ein Logarithmus definiert ist. (Begründe Deine Behauptung.)

(b) Welche möglichen Real- bzw. Imaginärteile kann ein Logarithmus l am Punkt $z = re^{i\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R})$ annehmen?

(c) Was folgt daraus für die Differenz $l_1 - l_2$ zweier Logarithmen l_1 und l_2?

(d) Zeige, daß die folgenden Aussagen für eine holomorphe Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G äquivalent sind:

  1. Die Funktion f ist ein Logarithmus in G.
  2. Es gilt $l'(z) = \frac{1}{z}$ in G und existiert mindestens ein Punkt $a \in G$ mit $\exp(l(a)) = a$.

LÖSUNG:

(a) Ein Beispiel ist die negativ geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R}_-\}$ mit $l(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$ für $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$.

(b) $\operatorname{Re}(l(re^{i\varphi})) = r$, $\operatorname{Im}(l(re^{i\varphi})) \in \varphi + 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$.

(c) $l_1 - l_2 = 2\pi i \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\Rightarrow$ 2: Aus $\exp(l(z)) = z$ folgt $\exp'(l(z)) \cdot l'(z) = 1$ bzw. $l'(z) = \exp'(l(z))^{-1} = z^{-1}$.

$2 \Rightarrow 1$: Die Funktion $g(z) = z\exp(-l(z))$ ist auf G holomorph und es gilt

$$g'(z) = 1 \cdot \exp(-l(z)) + z\exp'(-l(z))(-\frac{1}{z}) = \exp(-l(z))(1 - zz^{-1}) = 0$$

auf G. Somit ist g auf dem Gebiet G konstant. Aus $g(a) = a\exp(-l(z)) = a\exp(l(z))^{-1} = aa^{-1} = 1$ folgt $g = 1$, d.h. l ist ein Logarithmus auf G.