8. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Gleichungen im Komplexen)

1. Finde alle komplexen Zahlen, für die gilt

$$(a)\ e^z = 12, \quad (b)\ z^k = 12, \quad (c)\ (1+i)z^2 - z = -3 - i.$$

2. Finde möglichst große Teilbereiche von $\mathbb{C}$, auf denen man die Funktionen $f(z) = e^z$ und $g(z) = z^k$ umkehren kann. Skizziere diese Mengen.

1. (a) $z_n = \ln 12 + 2n\pi i$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(b) $z_n = \sqrt[k]{12}e^{\frac{2n\pi i}{k}}$, für $n = 0, ..., k-1$.
(c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - 3i)$.

2. f ist auf dem Streifen

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in [0, 2\pi)\}$$

invertierbar.
g ist auf dem Sektor

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\phi},\ \phi \in \left(0, \frac{2\pi}{k}\right]\right\}$$

invertierbar.

A 2 (Sinus und Kosinus)
Wie im reellen definieren wir für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Zeige, dass sin und cos holomorph sind und dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ gilt.

Wegen

$$\left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2(n+1)+1)!} z^{2(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}} \right| = \left| \frac{z^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ist sin *eine konvergente Potenzreihe. Analog für den Kosinus. Also ist nach Satz 1.4 der Sinus und der Cosinus holomorph.*

Wie im Beweis von Satz 1.4 zeigt man

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z.$$

Analog für den Kosinus.

A 3 (Holomorphie) (5 Punkte)
Bestimme alle Punkte in $\mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

$$\begin{aligned}
f_1 \colon x + iy &\longmapsto xy + ixy \\
f_2 \colon x + iy &\longmapsto x^4y^3 + ix^3y^4 \\
f_3 \colon x + iy &\longmapsto y^2 \sin x + iy \\
f_4 \colon x + iy &\longmapsto x^2 - y^2 + 2ix|y| \\
f_5 \colon x + iy &\longmapsto \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)
\end{aligned}$$

Wo sind diese Funktionen holomorph?

Wir schreiben $f_j = u_j + iv_j$ mit $u_j, v_j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Für $j \neq 4$ sind u_j und v_j (total) differenzierbar. Dann ist f_j in z genau dann differenzierbar, wenn die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen in z erfüllt sind.

1. *Es ist $u_1(x,y) = xy$, $v_1(x,y) = xy$. Wir untersuchen die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:* $y = \frac{\delta u_1}{\delta x} \stackrel{!}{=} \frac{\delta v_1}{\delta y} = x$, $x = \frac{\delta u_1}{\delta y} \stackrel{!}{=} -\frac{\delta v_1}{\delta x} = -y$.
   Die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen sind nur in dem Punkt $(0,0)$ erfüllt und die Funktion f_1 nur dort komplex differenzierbar.
2. *Die Gleichung* $4x^3y^3 = \frac{\partial u_2}{\delta x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial v_2}{\partial y} = 4x^3y^3$ *ist stets erfüllt; wir untersuchen* $3x^4y^2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v_2}{\partial x} = -3x^2y^4$.
   Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn x oder y Null ist.
3. *Wir untersuchen*
   $$y^2\cos(x) = \frac{\partial u_3}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial v_3}{\partial y} = 1, \quad 2y\sin(x) = \frac{\partial u_3}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0.$$
   Aus der ersten Gleichung folgt, dass y nicht Null sein darf. Also muss $\sin(x)$ wegen der 2. Gleichung Null sein: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.
   Die 1.Gleichung liefert $\cos(x) > 0$, also $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $y^2 = 1$,, d.h $y = \pm 1$.
   Die Funktion f_3 komplex differenzierbar in $x + iy \Leftrightarrow (x,y) \in 2\pi\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$.
4. *Die Funktion u_4 ist auf $\mathbb{C}$ differenzierbar. Für $y \neq 0$ ist v_4 stetig partiell differenzierbar, also differenzierbar. Für $y = 0$, $x \neq 0$ ist v_4 nicht partiell differenzierbar.*
   Für $x = y = 0$ ist v_4 differenzierbar mit Ableitung 0, denn wegen
   $$\frac{|v_4(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\max|x|,|y|$$
   gilt
   $$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|v_4(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = 0.$$
   In $(0,0)$ verschwinden alle partiellen Ableitungen, so dass f_4 dort komplex differenzierbar ist.
   Für $y > 0$ gilt
   $$2x = \frac{\partial u_4}{\partial x} = \frac{\partial v_4}{\partial y}, \quad -2y = \frac{\partial u_4}{\partial y} = -\frac{\partial v_4}{\partial x},$$
   so dass f_4 komplex differenzierbar ist.
   Für $y < 0$ gilt
   $$-2y = \frac{\partial u_4}{\partial y} \neq \frac{\partial v_4}{\partial x} = 2y,$$
   f_4 ist nicht komplex differenzierbar.
5. *Es ist*
   $$\frac{\partial u_5}{\partial x} = \frac{\partial u_5}{\partial y} = 2\sin(x+y)\cos(x+y) = -\frac{\partial v_5}{\partial x} = -\frac{\partial v_5}{\partial y},$$
   also
   $$\frac{\partial u_5}{\partial x} = \frac{\partial v_5}{\partial y} \Leftrightarrow x + y \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Die Abbildungen f_1, f_2, f_3, und f_5 sind auf keiner nichtleeren offenen Menge komplex differenzierbar, also nirgends holomorph, f_4 ist auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorph.

A 4 (Imaginärteile holomorpher Funktionen) (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen sind Imaginärteile einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion?

$$v_1 : x + iy \longmapsto 3x^2 + 4xy + y$$
$$v_2 : x + iy \longmapsto -e^y \sin x + \sinh x \cdot \sin y + 2xy$$

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$, die Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist, muss harmonisch sein. Diese Bedingung wird nicht von v_1, aber von v_2 erfüllt:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x+4y) + \frac{\partial}{\partial y}(4x+1) = 6 \neq 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(-e^y \cos x + \cosh x \cdot \sin y + 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^y \sin x + \sinh x \cdot \cos y + 2x) \\ &= e^y \sin x + \sinh x \cdot \sin y - e^y \sin x + \sinh x \cdot \sin y = 0.\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass v_2 tatsächlich der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist, geben wir einen möglichen Realteil an, also eine differenzierbare Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} = -e^y \sin x + \sinh x \cdot \cos y + 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x} = -e^y \cos x + \cosh x \cdot \sin y + 2y.$$

Eine solche Funktion ist durch

$$u(x+iy) = e^y \cos x + \cosh x \cdot \cos y + x^2 - y^2$$

gegeben.

A 5 **(Bilder von Geraden und Kreisen)** (2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$. Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises

$$K_r := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = r^2\} \quad (\text{mit Radius } r \geq 0)$$

wieder ein Kreis ist. Wieviele Urbilder hat ein Bildpunkt?
Untersuchen Sie auch die Bilder von Halbgeraden $\{tz : 0 \leq t < \infty\},\ z \in \mathbb{C}$, durch den Ursprung.
Was passiert mit Kreisen und Halbgeraden, wenn man die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z\overline{z}$ anwendet?

Wir benutzen die Polardarstellung von komplexen Zahlen. Es ist also

$$K_r = \{z = re^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Also ist

$$f(K_r) = \{z = r^2 e^{2i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\} = K_{r^2},$$

wobei jeder Bildpunkt $re^{i\varphi}$ genau zwei Urbilder besitzt, nämlich $\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ und $\sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$.
Das Bild einer Halbgeraden $\{tz : 0 \leq t < \infty\}$ ist die Halbgerade $\{tz^2 : 0 \leq t < \infty\}$.
Weiter ist $g(re^{i\varphi}) = re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2$. Das Bild eines Kreises K_r ist also $\{r^2\}$, das Bild jeder Halbgeraden durch den Ursprung die positive reelle Achse.

A 6 **(Konstante Funktionen)** (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. Zeige, dass f konstant ist, wenn wenigstens eine der beiden Funktionen $u = Re\, f$ und $v = Im\, f$ konstant ist.
2. Zeige, dass f konstant ist, wenn $|f|$ konstant ist.
   Hinweis: Betrachte die partiellen Ableitungen von $|f|^2$.
3. Zeige: Ist f und $\overline{f}$ holomorph, so ist f konstant.

1. Sei u konstant. Dann gilt $v_x = -u_y = 0$ und $v_y = u_x = 0$.

2. *Sei* $a^2 = |f|^2 = u^2 + v^2$. *Dann gilt*

$$0 = \nabla a^2 = \begin{pmatrix} 2uu_x + 2vv_x \\ 2uu_y + 2vv_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uu_x - 2vu_y \\ 2uu_y + 2vu_x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

   1. Fall: $a = |f| = 0$. *Dann ist* $f = 0$ *konstant.*
   2. Fall: $a \neq 0$. *Dann gilt* $\det \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = a^2$ *und* $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ *ist invertierbar. Es folgt* $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0$ *und* u *ist konstant und nach 1. auch* f.

3. *Wenn* $\overline{f} = u - iv$ *auch holomorph ist, so gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* $u_x = -v_y$ *und* $u_y = v_x$. *Gemeinsam mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für* f *gilt* $-v_y = u_x = v_y$ *also* $v_y = 0$ *und* $v_x = u_y = -v_x$ *also* $v_x = 0$. *Es folgt, dass* v *konstant ist. Nach 1. ist auch* f *konstant.*

Loesung