**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/076. Dezember 2006

# Analysis III

## 7. Übung mit Lösungshinweisen

### Aufgabe 1 Zum Aufwärmen

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme und geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an.

(a) $y' = xe^x$, $y(0) = 1$ (b) $y' = (\cos x)y$, $y(\pi) = 1$ (c) $y' = (\cos x)y + x^2 e^{\sin x}$, $y(0) = 5$

LÖSUNG:

(a) $y(x) = xe^x - e^x + c,\ y(0) = 1 \Rightarrow c = 2, y(x) = xe^x - e^x + 2$

(b) $\frac{y'}{y} = \cos x \Rightarrow \ln y = \sin x + c \Rightarrow y = e^{\sin x + c} = c_2 e^{sinx}$, $y(\pi) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, y(x) = e^{sinx}$

(c) Die Lösung der homogenen DGL ist $y(x) = e^{sinx}$. Die Variation der Konstanten ergibt $y(x) = e^{sinx}\left(c + \int_0^x \frac{t^2 e^{\sin t}}{e^{\sin t}}\,dt\right) = e^{sinx}(c + \frac{1}{3}x^3)$. Es folgt $y(x) = e^{sinx}(5 + \frac{1}{3}x^3)$

### Aufgabe 2 Zum Aufwärmen II

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden DGLn:

(a) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 0$

LÖSUNG:

(a) Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$. Somit ist $-2$ eine doppelte Nullstelle und das Fundamentalsystem ist $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = xe^{-2x}$.

(b) Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$. Somit bilden $y_1(x) = \sin 2x$ und $y_2(x) = \cos 2x$ ein Fundamentalsystem.

(c) Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$ hat die Nullstellen $-1$, $i$ und $-i$. Hierbei ist $-1$ eine doppelte Nullstelle. Damit bilden die Funktionen $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, $y_3(x) = \sin x$ und $y_4(x) = \cos x$ ein Fundamentalsystem.

### Aufgabe 3 Homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGLnsysteme

(a) $\begin{aligned} u' &= u + v \\ v' &= u - v \end{aligned}$ (b) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{y}$ (c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich Ihrer Lösung an.

*Hinweis:* Setzen Sie in (b) die Zeilen ineinander ein, um DGLn 2. Ordnung für $y_1$ bzw. $y_2$ zu erhalten.

LÖSUNG:

(a)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) &= \exp\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \exp\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right]\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0 \cos t - v_0 \sin t \\ u_0 \cos t + v_0 \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Durch Differenzieren der 1. Zeile erhält man $y_1'' = ay_1' + by_2'$. Ein Einsetzen der 2. Zeile liefert $y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2)$. Unter Verwendung der 1. Zeile ($by_2 = y_1' - ay_1$) ergibt sich $y_1'' = ay_1' + bcy_1 + ady_1' - dy_1' - ady_1 = (a+d)y_1' - (ad - bc)y_1$. Man erhält somit die lineare homogene DGL

$$y_1'' - (\mathrm{Spur} A) \cdot y_1' + (\det A) y_1 = 0.$$

Analog erhält man für $y_2$ die DGL

$$y_2'' - (\mathrm{Spur} A) \cdot y_2' + (\det A) y_2 = 0.$$

(c) Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = (2-\lambda)\lambda(1+\lambda) + 6 - 2(2-\lambda) - (1+\lambda) - 4\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ hat die Nullstellen 1, $i$ und $-i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $v_3 = \overline{v_2}$. Damit bilden die Funktionen $y_1(t) = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$y_2(t) = \mathrm{Re}(e^{it} v_2) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \; y_3(t) = \mathrm{Im}(e^{it} v_2) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem.

**Aufgabe 4 Substitution**

Lösen Sie folgende DGLn und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösungen an:

(a) $y' = (x+y)^2$  (b) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$  (c) $y' = \frac{y \ln y}{1+x^2}$  (d) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2x+x^2)}$

LÖSUNG:

(a) Durch die Substitution $z(x) = y(x) + x$ erhält man die DGL $z' = z^2$. Es folgt $z(x) = \frac{-1}{x+c}$ bzw. $y(x) = \frac{-1}{x+c} - x$.

(b) Durch die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ erhält man die DGL

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y(x)}{x^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{-1}{x \cdot z(x)^2}$$

bzw. $z^2 z' = \frac{-1}{x}$. Es folgt $\frac{1}{3}z^3 = c - \ln x$ und somit $y(x) = x\sqrt[3]{3(c - \ln x)}$.

(c) Durch die Substitution $z(x) = \ln y(x)$ erhält man die DGL $z' = \frac{z}{1+x^2}$. Es folgt $\ln z(x) = \arctan x + c$ bzw. $y(x) = c_2 e^{\arctan x}$.

(d) Durch die Substitution $z = y^2$ erhält man die DGL $z' = 2yy' = \frac{2e^{-z}}{2x+x^2} = \frac{2e^{-z}}{x(2+x)}$. Es folgt $e^{z(x)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx + c = \ln x - \ln(x+2) + c = \ln(\frac{x}{x+2}) + c$ und $y(x) = \ln\left(\ln(\frac{x}{x+2}) + c\right)$

### Aufgabe 5 Variation der Konstanten

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu folgenden DGLn:

(a) $y' + y = x^2$ (b) $y' + \frac{y}{1+x} = 2x$ (c) $y' + y \sin x = \sin^3 x$

LÖSUNG:

(a) Die Lösung der homogenen DGL ist $y(x) = ce^{-\int 1\,dx} = ce^{-x}$. Es folgt $y(x) = e^{-x}\left(c + \int x^2 e^x\,dx\right) = e^{-x}(c + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) = ce^{-x} + x^-2x + 2$.

(b) Die Lösung der homogenen DGL ist $y(x) = ce^{-\int \frac{1}{1+x}\,dx} = ce^{-\ln(1+x)} = \frac{1}{1+x}$. Es folgt $y(x) = \frac{1}{1+x}\left(c + \int (1+x)(2x)\,dx\right) = \frac{c}{1+x} + \frac{x^2+\frac{2}{3}x^3}{1+x} = \frac{c+x^2+\frac{2}{3}x^3}{1+x}$.

(c) Die Lösung der homogenen DGL ist $y(x) = ce^{-\int \sin x\,dx} = ce^{\cos x}$. Es folgt $y(x) = e^{\cos x}\left(c + \int \sin^3 x e^{-\cos x}\,dx\right) = e^{\cos x}\left(c + \int (t^2-1)xe^{-t}\,dt\right)$ mit $t = \cos x$. Ausrechnen des Integrals und Einsetzen von $t = \cos x$ ergibt $y(x) = e^{\cos x}(c - [t^2 - 1 + 2t + 2]e^{-t}) = ce^{\cos x} + \sin^2 x - 2\cos x - 2$.

### Aufgabe 6 Wronski-Determinante

In welchen Fällen können die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem einer linearen DGL $n$-ter Ordnung sein?

(a) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ (b) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^5$ (c) $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = 2\cos^2 x$, $y_3 = 3$

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\det W(x) = 2$. Daher können die Funktionen $y_1$,$y_2$ und $y_3$ ein Fundamentalsystem einer linearen DGL $n$-ter Ordnung sein.

(b) Es gilt $\det W(x) = 12x^5$. Daher können die Funktionen $y_1$,$y_2$ und $y_3$ genau dann ein Fundamentalsystem einer linearen DGL $n$-ter Ordnung sein, wenn das Gebiet nicht die 0 enthält.

(c) Es gilt $y_3 = 3y_1 + \frac{3}{2}y_2$. Daher können die Funktionen $y_1$,$y_2$ und $y_3$ **kein** Fundamentalsystem einer linearen DGL $n$-ter Ordnung sein.

### Aufgabe 7 Potenzreihenansatz (8 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = 0.$$

(a) Führen Sie für diese DGL einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch.

(b) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die $a_n$.

(c) Berechnen Sie $a_0, \ldots, a_6$ (Nehmen Sie dabei an, dass $a_1 > 0$ gilt).

(d) Finden Sie eine geschlossene Form von $f$.

**Aufgabe 8 Der arme Hund (8 Punkte)**

Durch das Land Sisylana (die $x$-$y$-Ebene) fließt ein Fluß, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ in positive $y$-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1,0)$ in den Fluß und versucht, sein Herrchen zu erreichen, das in $(0,0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit $v_1$ und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird. Bestimme die Kurve $y = \varphi(x)$, die der Hund zurücklegt. Wird er das andere Ufer erreichen? (Wenn ja, an welcher Stelle? Erreicht der Hund das andere Ufer dann in endlicher Zeit?)

*Hinweis:* $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dx = \operatorname{arsinh} z$

**Aufgabe 9**

Verstehen Sie die Übungen 1-7.