6. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Eulersche Differentialgleichung)**
Wir betrachten die Eulersche Differentialgleichung

$$a_n x^n y^{(n)} + \ldots + a_1 x^1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$.
Beweise: Die Funktion $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ löst genau dann die Eulersche Gleichung (1), wenn $u(t) := y(e^t)$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k! \binom{D}{k} u = 0$$

löst, wobei $\binom{D}{k} := \frac{1}{k!}(D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1) \cdot D$ und $D = \frac{d}{dt}$.

Es gilt $y(x) = u(\ln x)$, also gilt mit $t = \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = Du \cdot \frac{1}{x} = e^{-t} Du.$$

Wir zeigen per Induktion, dass

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}(D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1)Du.$$

Der Induktionsanfang ist bereits gezeigt. Wegen Lemma 4.10 und der gleichen Rechnung wie oben erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} &= \frac{d}{dt}\left(e^{-kt}(D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1)Du\right) e^{-t} \\
&= e^{-kt}(D-k)(D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1)Du e^{-t} \\
&= e^{-(k+1)t}(D-(k+1)+1)(D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1)Du.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = (D-k+1) \cdot \ldots \cdot (D-1)Du.$$

Setzt man das in die Gleichung ein, so erhält man die Behauptung.

A 2

1. **(Eulersche Differentialgleichung)** (3 Punkte)
   Sei $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $ty' + y = f(t)$, $t > 0$.
2. **(Bernoullische Differentialgleichung)** (3 Punke)
   Bestimme für $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha > 1$ sämtliche positiven Lösungen der Differentialgleichung

   $$y' = ay + by^\alpha.$$

   Hinweis: Verwende die Substitution $z = y^{1-\alpha}$.

1. *Substituiert man $t = e^s$ so erhält man*

   $$e^s y'(e^s) + y(e^s) = f(e^s).$$

   Setzt man $z(s) = y(e^s)$ so ergibt dies

   $$z'(s) = -z(s) + f(e^s).$$

   Die homogene Gleichung hat die Lösung $\phi(s) = e^{-s}$. Die Formel von der Variation der Konstante ergibt

   $$\psi(x) = e^{-x}\left(c + \int_{x_0}^{x} f(e^s)e^s ds\right) = e^{-x}\left(c + \int_{\exp(x_0)}^{\exp x} f(y)dy\right) = e^{-x}\left(c + F(\exp x) - F(\exp(x_0))\right).$$

2. *Substituiert man* $z = y^{1-\alpha}$ *so folgt* $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}y'$ *also* $y' = (1-\alpha)^{-1}z'z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. *Setzten wir dies in die Differentialgleichung ein so erhalten wir*

$$(1-\alpha)^{-1}z'z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = az^{\frac{1}{1-\alpha}} + bz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit $z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ *so erhält man die Gleichung*

$$z' = (1-\alpha)az + (1-\alpha)b,$$

welche man mit Variation der Konstante löst. Man erhält

$$z(x) = \varphi(x)\left(c - \int \frac{(1-\alpha)b(t)}{\varphi(t)}\right)$$

mit der homogenen Lösung

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_0^x (1-\alpha)a(t)dt\right).$$

Die gesuchte Lösung y *ist nun durch* $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ *gegeben.*

A 3 (Ansatz nach dem Typ der rechten Seite) (5 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cosh(2x)$.

a) Bestimme ein reelles Fundamentalsystem zur homogenen Gleichung.

b) Wie lautet ein korrekter Ansatz vom Typ der rechten Seite für die inhomogene Differentialgleichung?

c) Bestimme alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

a) Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)$ *und hat damit die Nullstellen* $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 2$. *Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist also* $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x}$. *Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch* $\{1, x, e^{-2x}, e^{2x}\}$.

b) Die rechte Seite lautet $r(x) = 1 + \cosh(2x) = 1 + \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$. *Für jeden der einzelnen Terme* 1, $\frac{1}{2}e^{2x}$ *und* $\frac{1}{2}e^{-2x}$ *ist ein separater Ansatz vom Typ der rechten Seite möglich. Man prüft leicht nach, da der Ableitungsoperator mit der Addition verträglich ist, dass die Summe der drei dadurch gefundenen Partikularlösungen eine Partikularlösung der gesamten DGL ist.*

Für den Term 1 erhalten wir $\lambda = 0$ *(Man kann 1 als* $e^{0x} \cdot \cos 0x \cdot (1x^0)$ *darstellen. Der zugehörige Ansatz für die Partikulärlösung ist also* Ax^0. *Dieser Ansatz muss aber mit* x^2 *multipliziert werden, da* $\lambda = 0$ *eine zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.*

Für den Term $\frac{1}{2}e^{2x}$ *erhalten wir* $\lambda = 2$. *Der Ansatz für die Partikulärlösung ist* Be^{2x}. *Dieser Ansatz muss nun mit* x^1 *multipliziert werden, da* $\lambda = 2$ *eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.*

Analog für den Term $\frac{1}{2}e^{-2x}$ *erhalten wir* $\lambda = -2$, *was den Ansatz* Ce^{-2x} *liefert. Da auch* $\lambda = -2$ *eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, muss auch dieser Ansatz mit* x^1 *multipliziert werden.*

Die Summe der gefundenen einzelnen Partikulärlösungen liefert die spezielle Lösung

$$y_s = Ax^2 + Bxe^{2x} + Cxe^{-2x}.$$

c) Um die Koeffizienten A, B, C *zu bestimmen, setzen wir sie in die Gleichung ein. man hat*

$$y_s'' = 2A + B(4e^{2x} + 4xe^{2x}) + C(-4e^{-2x} + 4xe^{-2x})$$
$$y_s^{(4)} = B(32e^{2x} + 16xe^{2x}) + C(-32e^{-2x} + 16xe^{-2x}).$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) =& B(32e^{2x} + 16xe^{2x}) + C(-32e^{-2x} + 16xe^{-2x}) \\ &- 4(2A + B(4e^{2x} + 4xe^{2x}) + C(-4e^{-2x} + 4xe^{-2x})).\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{32}, \quad C = -\frac{1}{32}.$$

Man erhält als partikuläre Lösung $y_s(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}\sinh(2x)$. *Also sind alle Lösungen der Gleichung gegeben durch* $y = y_s + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x}$.

A 4 (^{P} **Lineare Differentialgleichungen)** (6 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(1) Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.
(2) Es gibt ein $t_0 \geq 0$ mit $\|e^{t_0 A}\| < 1$.
(3) Es gibt $M \geq 1$, $\omega > 0$ mit $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}$ für $t \geq 0$.
(4) Alle Lösungen $x(t)$ von $x' = Ax$ streben für $t \to \infty$ gegen 0.

Hinweis: Ist B eine Diagonalmatrix, so gilt $\|B\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW. von } B\}$. (Warum?)

Zum Hinweis: Ist $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, *wobei* (e_k) *die kanonische Basis von* $\mathbb{C}^n$, *so gilt*

$$\begin{aligned}\|Bx\|^2 &= \left\|\sum_{k=1}^n a_k \lambda_k e_k\right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 |\lambda_k|^2 \\ &\leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \textit{ EW. von } B\}^2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \\ &= \max\{|\lambda| \mid \lambda \textit{ EW. von } B\}^2 \|x\|^2,\end{aligned}$$

also $\|B\| \leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \textit{ EW. von } B\}$. *Ist* v *ein Eigenvektor zu* λ, *wobei* $|\lambda|$ *maximal, so gilt* $\|Bv\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \textit{ EW. von } B\}\|v\|$. *Somit ist die Behauptung bewiesen.*
"(1)⇒(3)"
Nach dem Satz über die jordansche Normalform gibt es D, J, N, *so dass* $A = D(J+N)D^{-1}$ *ist mit einer Diagonalmatrix* J *und einer nilpotenten Matrix* N, *für die gilt* $JN = NJ$. *In der Diagonalmatrix* J *stehen gerade die Eigenwerte von* A. *Also gilt*

$$e^{tA} = De^{tJ}e^{tN}D^{-1},$$

das heißt

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| \leq \|D\|\|e^{tJ}\|\|e^{tN}\|\|D^{-1}\| &= c\sup\{|e^{t\lambda}| \mid \lambda \textit{ EW. von } A\} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\|N\|^k t^k}{k!} \\ &= c\sup\{e^{tRe\,\lambda} \mid \lambda \textit{ EW. von } A\} \cdot p(t),\end{aligned}$$

wobei p *ein Polynom ist. Haben also alle Eigenwerte von* A *negativen Realteil, so gilt, wenn wir den Eigenvektor mit dem größten Realteil* λ_0 *nennen,*

$$\|e^{tA}\| \leq cp(t)e^{Re\,\lambda_0 t} \leq Me^{\frac{1}{2}Re\,\lambda_0 t},$$

das heißt es gilt (3) mit $\omega = -\frac{1}{2} Re\, \lambda_0 > 0$.
"(3)⇒(4)"
Sei $x(t)$ eine Lösung von $x' = Ax$. Dann gilt nach Satz 4.3 $x(t) = e^{tA}u_0$ für ein geeignetes $u_0 \in \mathbb{C}^n$, also

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\|\|u_0\| \leq Me^{-\omega t}\|u_0\| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

"(4)⇒(2)"
Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^n$. Dann ist $e^{tA}e_k$ für $k = 1, ..., n$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = Ax$. Also gilt $\|e^{tA}e_k\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ für alle k. Das heißt gibt es ein $t_0 \geq 0$, so dass $\|e^{t_0 A}e_k\| < \frac{1}{2C}$, wobei C die Äquivalenzkonstante der Eins-Norm zur Zwei-Norm ist. Für beliebiges $x \in \mathbb{C}^n$ gilt folglich

$$\|e^{t_0 A}x\| = \left\| e^{t_0 A} \sum_{k=0}^{n} a_k e_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\|e^{t_0 A}e_k\| \leq \frac{1}{C}\|x\|_1 < \frac{1}{2}\|x\|.$$

Somit ist $\|e^{t_0 A}\| \leq \frac{1}{2} < 1$.
"(2)⇒(1)"
Sei λ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$e^{tA}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} v = e^{\lambda t}v.$$

Weiterhin gilt

$$|e^{\lambda t_0}|\|v\| = \|e^{\lambda t_0}v\| = \|e^{tA}v\| \leq \|e^{tA}\|\|v\| < \|v\|$$

also $|e^{\lambda t_0}| < 1$. Wegen $|e^{\lambda t_0}| = e^{\mathrm{Re}\,\lambda t_0}$, folgt $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

A 5 (^{K} **Maximale Lösung)**

Als *maximale Lösung* einer Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ verstehen wir eine Lösung $u : I \to \mathbb{R}^n$, so dass keine Lösung $v : J \to \mathbb{R}^n$ auf einem echt größeren Intervall $J \supsetneq I$ existiert, mit $v|_I = u$.

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und die beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Zeige:
Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n, \quad \text{von} \quad x' = f(t, x)$$

gilt entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t\to t_+} \|u(t)\| = +\infty$.

Sei $t_+ < \infty$.
Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $u'(t)$ beschränkt ist auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Dann ist u nach dem Mittelwertsatz Lipschitz-stetig, also gleichmäßig stetig auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Wir können also u stetig nach t_+ fortsetzen. Hieraus folgt

$$u'(t) = f(t, u(t)) \xrightarrow{t\to t_+} f(t_+, u(t_+)).$$

Somit ist u auch in t_+ differenzierbar mit $u'(t_+) = f(t_+, u(t_+))$. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 1.12) gibt es ein $\delta > 0$ und ein $w : (t_+ - \delta, t_+ + \delta) \to \mathbb{R}^n$ mit $w' = f(t, w)$ und $w(t_+) = u(t_+)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz 1.5 stimmt diese Lösung auf $(t_+ - \delta, t_+]$ mit u überein. Es folgt, dass

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in (t_-, t_+) \\ w(t) & \text{für } t \in [t_+, t_+ + \delta) \end{cases}$$

eine Lösung der DGL ist, die u fortsetzt. Widerspruch zur Maximalität von u.
Somit ist $u'(t)$ unbeschränkt auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Nach der Voraussetzung an f folgt, dass auch u unbeschränkt ist.
Angenommen, $\|u(t)\| \not\to \infty$ für $t \to t_+$. Dann existiert ein $M > 0$ und eine Folge $(x_n)_n \subset [t_+ - \varepsilon, t_+)$, mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} t_+$ und $\|u(x_n)\| \leq M$. Nach dem Zwischenwertsatz können wir oBdA annehmen, dass $\|u(x_n)\| = M$ gilt. Analog definieren wir die Folge y_n durch

$$y_n = \min\{y > x_n \mid \|u(y)\| \geq M + 1\}.$$

Dann gilt auch $y_n \xrightarrow{n\to\infty} t_+$. *Hiermit folgt aus der Stetigkeit von* $\|u\|$:

$$1 = \|u(y_n)\| - \|u(x_n)\| \leq \|u(y_n) - u(x_n)\| \leq \sup_{t\in[x_n,y_n]} \|u'(t)\|(y_n - x_n).$$

Es git also

$$\sup_{t\in[x_n,y_n]} \|u'(t)\| \geq \frac{1}{y_n - x_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Wir definieren die Menge

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n].$$

Für diese Menge gilt $\|u(U)\| \subset [0, M+1]$ *aber* $f(U, u(U)) = u'(U)$ *ist unbeschränkt. Das heißt, das Bild einer beschränkten Menge ist unbeschränkt. Widerspruch zur Voraussetzung an* f. *Also gilt* $\lim_{t\to t_+} \|u(t)\| = \infty$.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 27.11.2006 – 16:15-17:15 Uhr – S103/123

Prof. Dr. Martin Otto

FG Logik

„Welche Logik wofür? Logik zwischen Grundlagen und Anwendungen."

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und die Vortragenden näher kennenzulernen.