Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 21. November 2006

Analysis III

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zum Aufwärmen

Lösen Sie folgende DGLn und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösungen an.

(a) $y' = e^y$ (b) $y' = e^y \sin x$ (c) $y' = \frac{1-y^2}{x}$

LÖSUNG:

(a) $y' = e^y \Rightarrow e^{-y}y' = 1 \Rightarrow e^{-y} = x + c \Rightarrow y = -\ln(x + c)$ mit $x + c > 0$.

(b) $y' = e^y \sin x \Rightarrow e^{-y}y' = \sin x \Rightarrow e^{-y} = \cos x + c \Rightarrow y = -\ln(\cos x + c)$ mit $\cos x + c > 0$.

(c) Die Funktionen $y = \pm 1$ sind Lösungen der DGL. Eine Trennung der Variablen mit $|y| \neq 1$ ergibt
$y' = \frac{1-y^2}{x} \Rightarrow \frac{y'}{1-y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln\left[\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}\right]_{y_0}^{y} = \ln|x| - \ln|x_0| \Rightarrow \ln\left[\sqrt{\left|\frac{1+y}{1-y}\right|}\right] - \ln|x| = c$
$\Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = cx^2 \Rightarrow 1+y = \pm cx^2(1-y) \Rightarrow y(1 \pm cx^2) = \pm cx^2 - 1$. Die weiteren möglichen Lösungen sind somit $y(x) = \frac{cx^2-1}{cx^2+1}$ und $y(x) = \frac{cx^2+1}{cx^2-1}$.

Aufgabe G2 Homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

LÖSUNG:

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2)$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Mit dem Gaußalgorithmus ergeben sich die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist $\mathbf{y}(x) = e^x\mathbf{v}_1 + e^{\sqrt{2}x}\mathbf{v}_2 + e^{-\sqrt{2}x}\mathbf{v}_3$.

Aufgabe G3 Variation der Konstanten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned}$$

LÖSUNG:

Die Lösung der homogenen DGL

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x - y_2(0)\sin x \\ y_2(0)\cos x + y_1(0)\sin x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Variation der Konstanten folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x) &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \exp\left[-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right] \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt \right) \\ &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt \right) \\ &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} tsint \\ t\cos t \end{pmatrix} dt \right) \\ &= \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\right] \left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sinx - x\cos x \\ x\sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x - y_2(0)\sin x \\ y_2(0)\cos x + y_1(0)\sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x - x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(0)\cos x + (1 - y_2(0))\sin x - x \\ (y_2(0) - 1)\cos x + y_1(0)\sin x + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe G4 Lineare homogene Differentialgleichung

Bestimme ein reelles Fundamentalsystem sowie die Lösung von

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y(t), y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

EWe von A: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2/3} = 1 \pm 2i$
zugehörige EVen: $b_1 = (2, -3, 2)^t, b_2 = (0, 1, -i)^t, v_3 = \overline{v_2}$

Realteil$(v_2) = (0,1,0)^t =: c$, Imaginärteil$(v_2) = (0,0,-1)^t =: d$
Somit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; y_2(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \; y_3(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Lösen des Gleichungssystems $y_0 = ay_1(0) + by_2(0) + cy_3(0)$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ergibt $a = 0, b = 1, c = -1$ und somit ist

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) + cy_3(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

Aufgabe H1 System von homogenen linearen Differentialgleichungen

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Bestimme ein Lösungsfundamentalsystem für das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcllll} y_1' & = & ay_1 & +by_2 & +cy_3 & +dy_4 \\ y_2' & = & & ay_2 & +by_3 & +cy_4 \\ y_3' & = & & & ay_3 & +by_4 \\ y_4' & = & & & & ay_4 \end{array}$$

sowie eine Lösung des Systems, die die Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, y_3(0) = y_4(0) = 0$$

erfüllt.

LÖSUNG:

Umschreiben des Systems in eine DGL erster Ordnung:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ein Lösungsfundamentalsystem von $y' = Ay$ wird geliefert durch die Spalten von e^{At}. Man kann nun entweder den Eigenvektor und die drei Hauptvektoren zum vierfachen Eigenwert a bestimmen und so ein Lösungsfundamentalsystem gewinnen, oder parallel zur Herleitung der Exponentialfunktion einer Jordanmatrix e^{At} direkt bestimmen. Dazu setzen wir

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$A = aI + bN + cN^2 + dN^3,$$

d.h. A ist ein Polynom in N. Da Polynome in N miteinander kommutieren, ist

$$e^{At} = e^{aIt} \cdot e^{bNt} \cdot e^{cN^2t} \cdot e^{dN^3t}.$$

Wegen $N^4 = 0$ finden wir

$$\begin{aligned} e^{aIt} &= e^{at}I, \\ e^{bNt} &= I + btN + \frac{(btN)^2}{2!} + \frac{(btN)^3}{3!}, \\ e^{cN^2t} &= I + ctN^2, \\ e^{dN^3t} &= I + dtN^3, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{at}(I + btN + \frac{(btN)^2}{2!} + \frac{(btN)^3}{3!})(I + ctN^2 + dtN^3) \\ & e^{at}(I + ctN^2 + dtN^3 + btN + bct^2N^3 + \frac{b^2t^2N^2}{2!} + \frac{b^3t^3N^3}{3!}) \\ & e^{at}(I + btN + (ct + \frac{b^2t^2}{2!})N^2 + (dt + bct^2 + \frac{b^3t^3}{3!})N^3). \end{aligned}$$

Also ist

$$e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2t^2}{2!} & dt + bct + \frac{b^3t^3}{3!} \\ 0 & 1 & bt & ct + \frac{b^2t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Spalten dieser Matrix bilden ein Lösungsfundamentalsystem, die den Anfangsbedingungen entsprechende Lösung ist dann

$$y(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 + bt \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 lineare inhomogene DGL

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 + 3y_2 + e^t \\ y_2' &= -10y_1 + 7y_2 + t \end{aligned}$$

Lösung:

Wir schreiben das System als $y' = Ay + b$ und bestimmen zunächst die homogene Lösung. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.
EW $\lambda_1 = 1$, EV $v_1 = (3,5)^t$
EW $\lambda_2 = 2$, EV $v_2 = (1,2)^t$
e^{At} bestimmen wir mittels Diagonalisieren von A zu

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 6e^t - 5e^{2t} & 3e^{2t} - 3e^t \\ 10e^t - 10e^{2t} & 6e^{2t} - 5e^t \end{pmatrix}.$$

Somit ist die homogene Lösung gegeben durch

$$y_{hom}(t) = e^{At} y_0, \;\; y_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung mittels Variation der Konstanten:

$$u(t) = \int_0^t e^{-As} b(s) ds = \begin{pmatrix} -\frac{29}{4} + 6t + e^{-t}(8+3t) - e^{-2t}(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t) \\ -\frac{27}{2} + 10t + e^{-t}(15t + 5t) - e^{-2t}(\frac{3}{2} + 3t) \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$y_{spez}(t) = e^{At} u(t) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} + \frac{3}{2}t + e^{-t}(2+6t) - \frac{17}{4}e^{2t} \\ \frac{7}{2} + 2t + e^{t}(5 + 10t) - \frac{17}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann gegeben durch

$$y_{allg}(t) = y_{hom}(t) + y_{spez}(t).$$