4. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Lösungsräume von Differentialgleichungen)
Entscheide, ob die Lösungsräume der folgenden Differentialgleichungen Vektorräume sind. Wenn ja, dann bestimme die zugehörige Dimension.

$$(a)\ x^2u^{(12)} - \sin(x)u' = u, \quad (b)\ (\cos x + u'')^2 = 0, \quad (c)\ \cos x + e^x u' = 0.$$

(a) Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung. Ihr Lösungsraum ist ein Vektorraum der Dimension 12.
(b) 0 ist keine Lösung $\Rightarrow$ kein Vektorraum.
(c) Wie (b).

A 2 (Lineare Unabhängigkeit von Funktionen) (3+2 Punkte)

1. Entscheide, ob die Funktionen f, g, h linear unabhängig sind.
   (a) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$, $g(x) = -1 + \sin x$, $h(x) = \cos^2 x$.
   (b) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin^3 x$, $h(x) = e^x$
2. Berechne die Wronski Determinante an der Stelle $x = 0$ der Funktionen f, g, h aus (b). Vergleiche das Ergebnis mit deinem Ergebnis in 1.(b). Ist das ein Widerspruch zu Satz 3.8?

1. *(a) $f + h = -g$. Also sind die Funktionen linear abhängig.*
   (b) Sei $af + bg + ch = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir setzen Werte ein.

$$\begin{aligned} 0 &= af(0) + bg(0) + ch(0) = c \\ 0 &= af(\pi) + bg(\pi) + 0h(\pi) = \pi^3 a \\ 0 &= 0f(\frac{\pi}{2}) + bg(\frac{\pi}{2}) + 0h(\frac{\pi}{2}) = b \end{aligned}$$

   Es folgt also $a = b = c = 0$, das heißt f, g, h sind linear unabhängig.

2. $$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

   Das ist kein Widerspruch zu Satz 3.8. das heißt nur, dass es keine Differentialgleichung 3. Ordnung gibt, so dass $\{f, g, h\}$ ein Fundamentalsystem bilden.

A 3 (Fundamentalsysteme) (3+1 Punkte)

1. ^{P} *Beweise:*
   Ein Fundamentalsystem bestimmt eine lineare homogene Differntialgleichung n-ter Ordnung eindeutig.
   Genauer:
   Es gibt höchstens eine Möglichkeit, n stetige Funktionen $a_0, ..., a_{n-1}$ zu wählen, so dass $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

   ist.
2. Kann $\{y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2\}$ ein Fundamentalsystem zu einer Differentialgleichung 3. Ordnung sein? Wenn ja, zu welcher?

1. *Sei* $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ *zusätzlich ein Fundamentalsystem der Gleichung*

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + ... + b_1 y' + b_0 y = 0$$

mit stetigen b_k, $k = 1, ..., n-1$. *Dann gilt nach Subtraktion der beiden Differentialgleichungen*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - b_k)\phi_j^{(k)} = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Betrachtet man das n*-fache kartesische Produkt mit jeweils verschiedenen* ϕ_j, *so erhält man*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k(x) - b_k(x))(\phi_1^{(k)}(x), ..., \phi_n^{(k)}(x)) = 0 \ \text{ für alle } x.$$

Bei einem Fundamentalsysytem ist die Wronski Determinante $\neq 0$, *das heißt insbesondere, dass die Zeilen der Wronski Matrix linear unabhängig sind. Die Zeilen der Wronski Matrix sind aber gerade* $(\phi_1^{(k)}(x), ..., \phi_n^{(k)}(x))$. *Also gilt* $a_k(x) - b_k(x) = 0$ *für alle* k *und alle* x.

2. *Ja. Die Funktionen* y_1, y_2, y_3 *sind offenbar linear unabhängig und alle Lösungen der Differentialgleichung* $y''' = 0$.

A 4 (Eliminationsmethode) (1+3 Punkte)
Wir betrachten das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rl} u' = & au + bv \\ v' = & cu + dv \end{array}, \quad u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ziel ist es, das System von Differentialgleichungen so umzuformen, dass man zuerst eine Differentialgleichung in u lösen kann, um dann die Lösungen in die untere Gleichung einzusetzen. Aus dieser erhält man dann eine Lösung v.

1. Zeige, dass jede Lösung u des Systems eine geeignete lineare Differentialgleichung zweiten Grades erfüllt.
2. Löse das System

$$u' = u + v, \quad v' = u - v, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = \sqrt{2} - 1.$$

1. *Da* $u' = au + bv$ *differenzierbar ist, können wir beide Seiten der ersten Gleichung ableiten. Man hat*

$$u'' = au' + bv' = au' + b(cu + dv) = au' + bcu + d(-au + u') = (a + d)u' + (bc - ad)u.$$

2. *In dem Beispiel ist* $a = b = c = 1$ *und* $d = -1$. *Nach 1. haben wir also* $u'' = 2u$ *zu lösen. Diese hat das Fundamentalsystem* $u_1(x) = e^{\sqrt{2}x}$, $u_2(x) = e^{-\sqrt{2}x}$ *mit den Anfangsbedingungen* $u(0) = 1$ *und* $u'(0) = u(0) + v(0) = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$ *erhalten wir aus* $u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$ *die Gleichungen*

$$c_1 + c_1 = 1 \ \text{ und } \ c_1\sqrt{2} - c_2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Hieraus folgt $u = e^{\sqrt{2}x}$. *Die Lösung* v *erhalten wir nun aus der Formel von der Variation der Konstante:*

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-x}\left(c + \int_0^x e^{(\sqrt{2}+1)t}dt\right) \\ &= e^{-x}\left(c + \frac{1}{\sqrt{2}+1}(e^{(\sqrt{2}+1)x} - 1)\right) = e^{-x}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}(e^{(\sqrt{2}+1)x} - 1)\right). \end{aligned}$$

A 5 (Die Matrixexponentialfunktion) (4 Punkte)
Berechne e^A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu bestimmen wir zunächst die Eigenwerte der Matrix A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -3\\ 3 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2+9 = (1+3i-\lambda)(1-3i-\lambda)$$

also sind $1+3i$ und $1-3i$ die Eigenwerte von A. Nun muß man die Eigenvektoren zu den Eigenwerten bestimmen.
Zu $\lambda_1 = 1+3i$: Wir bestimmen den Kern der Matrix $(A-\lambda_1 Id)$, d.h.

$$\begin{pmatrix}-3i & -3\\ 3 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Eine Lösung dieses Gleichungssystems und damit ein möglicher Eigenvektor ist $\binom{1}{-i}$.
Analog erhalten wir zu $\lambda_2 = 1-3i$ den Eigenvektor $\binom{i}{-1}$.
Somit erhalten wir

$$J := \begin{pmatrix}1-3i & 0\\ 0 & 1+3i\end{pmatrix} = C^{-1}AC.$$

wobei $C = \begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}$. Außerdem ist $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
e^A &= e^{CJC^{-1}} = Ce^JC^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{1-3i} & 0\\ 0 & e^{1+3i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-ie^{1-3i} & -e^{1-3i}\\ e^{1+3i} & ie^{1+3i}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{1-3i}+e^{1+3i} & -i(e^{1-3i}-e^{1+3i})\\ i(e^{1-3i}-e^{1+3i}) & e^{1-3i}+e^{1+3i}\end{pmatrix}\\
&= e\begin{pmatrix}\cos 3 & -\sin 3\\ \sin 3 & \cos 3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile verwendet wurde, dass

$$\cos t = Re\, e^{it} = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) \quad und \quad \sin t = Im\, e^{it} = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it}).$$