Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/076. November 2006

Analysis III

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zum Aufwärmen

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal lipschitzstetig.

(a) Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer ein Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?

(b) Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

LÖSUNG:

(a) Ja, dies folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.

(b) Ist y eine Lösung der DGL, so ist auch $h(x) = y(-x)$ eine Lösung, denn aus der Kettenregel folgt $h'(x) = y'(-x) \cdot (-1) = -y'(-x)$ und somit

$$h'(x) = -y'(-x) = -f(-x, y(-x)) = -f(-x, h(x)) = f(x, h(x)).$$

Da die Lösung eindeutig ist, folgt $y = h$ bzw. $y(x) = y(-x)$.

Aufgabe G2 Trennung der Variablen

Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL $y'(x) = y(x)^n$.

LÖSUNG:

Für $n = 0$ gilt $y' = 1$ und es folgt $y(x) = x + c$.

Für $n \neq 0$ erhalten Wir $\frac{y'}{y^n} = 1$. Integration (nach x) liefert $\frac{y^{1-n}}{1-n} = x + c$ bzw.

$$y(x) = \begin{cases} [(1-n)(x+c)]^{\frac{1}{1-n}} & \text{für } n \neq 1,\ n \text{ gerade} \\ \pm[(1-n)(x+c)]^{\frac{1}{1-n}} & \text{für } n \neq 1,\ n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\ln y = x + c \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \pm\exp(x+c) = c_2 \exp(x) \quad \text{für } n = 1.$$

Aufgabe G3

Wir betrachten die homogene DGL $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ mit den konstanten Koeffizienten b und c.

(a) Erraten Sie für $b = 0$ und $c = 1$ zwei unabhängige Lösungen.

(b) Lösen Sie für $b = 3$ und $c = 2$ obige DGL mit dem Ansatz $y(x) = \exp(\lambda x)$.

(c) Wie können Sie die in a) erratenen Lösungen mit dem Lösungsverfahren aus b) erhalten?

LÖSUNG:

(a) Für $b = 0$ und $c = 1$ sind sin und cos zwei unabhängige Lösungen.

(b) Setzt man $y(x) = \exp(\lambda x)$ in die DGL ein, so erhält man $\lambda^2 \exp(\lambda x) + \lambda b \exp(\lambda x) + c \exp(\lambda x) = 0$. Durch Kürzen mit $\exp(\lambda x)$ erhält man $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Für $b = 3$ und $c = 2$ ergeben sich die Lösungen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Somit sind die Funktionen $g(x) = e^x$ und $h(x) = e^{2x}$ die gesuchten Lösungen der DGL.

(c) Mit dem Lösungsverfahren aus b) erhält man $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die Lösungen wären demnach $g(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $h(x) = e^{-ix} = \cos -x + i \sin -x = \cos x - i \sin x$. Hiermit erhält man die Lösungen $\cos x = g(x) + h(x)$ und $\sin x = -i(g(x) - h(x))$.

Aufgabe G4 Reduktion der Ordnung

Es soll die DGL $x^2y'' - xy' + y = 0$ auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ gelöst werden.

(a) Raten Sie eine Lösung y_1 der DGL.

(b) Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der DGL.

LÖSUNG:

(a) $y_1(x) = x$ ist eine Lösung.

(b) Wir machen den Ansatz $y = xu$, also ist $y' = u + xu'$ und $y'' = 2u' + xu''$. Das wird in die DGL eingesetzt und wir erhalten

$$\begin{aligned} x^2y'' - xy' + y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(2u' + xu'') - x(u + xu') + xu = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u''x^3 + u'(2x^2 - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u''x + u' = 0 \quad \text{wegen } x > 0. \end{aligned}$$

Die Substitution $v = u'$ liefert die DGL $v'x + v = 0$. Mit Trennung der Variablen erhält man

$$\ln v = \int \frac{1}{v} = -\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Es folgt $v(x) = \frac{1}{x}$ und somit $u = \ln x$, also $y_2 = x \ln x$. Man rechnet nach, dass y_2 die DGL erfüllt. Dass y_2 unabhängig von y_1 ist, ist klar.

Aufgabe G5

Finden Sie alle Lösungen der DGL $y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = 0$.

Hinweis: Sie können wie in G3 b) vorgehen.

LÖSUNG:

Analog zu G2 b) erhält man die Gleichung $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) = 0$. Somit folgt $\lambda_{1,2,3,4} = \in \{-2, -1, 1, 2\}$ und die 4 Lösungen sind $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ $(1 \le i \le 4)$.

Hausübungen

Aufgabe H1 Trennung der Variablen

(a) Bestimmen Sie die Lösung der DGL $y' = (y+c)^n$ ($c = \text{const}$) für beliebige Anfangswerte x_0 und y_0.

Hinweis: Sie können die Substitution $z(x) = y(x) + c$ verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der DGL $y' + y + e^x \cdot y^3 = 0$ für beliebige Anfangswerte x_0 und y_0.

Hinweis: Sie können die Substitution $z(x) = y(x)^{-2}$ verwenden.

LÖSUNG:

(a) Die Substitution $z(x) = y(x) + c$ ergibt die DGL $z'(x) = y'(x) = z(x)^n$. Die Lösungen sind nach Aufgabe G3 b) daher

$$\begin{aligned}
y(x) = z(x) - c &= x + k - c && k \in \mathbb{R}, \text{ für } n = 0\\
y(x) = z(x) - c &= ke^x - c && k \in \mathbb{R}, \text{ für } n = 1\\
y(x) = z(x) - c &= \begin{cases} +[(1-n)(x+k)]^{\frac{1}{1-n}} - c & k \in \mathbb{R}, \text{ für } n \neq 0, 1, n \text{ gerade} \\ \pm[(1-n)(x+k)]^{\frac{1}{1-n}} - c & k \in \mathbb{R}, \text{ für } n \neq 0, 1, n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Die Substitution $z(x) = y(x)^{-2}$ liefert die DGL

$$z'(x) = (-2)y(x)^{-3}y'(x) = (-2)y(x)^{-3}(-y(x) - e^x y(x)^3) = 2z(x) + 2e^x = 2z(x) + 2e^x.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist $z(x) = ce^{2x}$. Die Variation der Konstanten (nach Aufgabe G3, 10.Übung) ergibt $c(x) = z(0) + \int_{x_0}^{x} e^{-2t}2e^t\, dt = z(0) + e^{-x_0} - e^{-x}$ Es folgt $z(x) = z(0)e^{2x} - e^x + e^{2x - x_0}$ bzw. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y(0)^2}e^{2x} - e^x + e^{2x-x_0}}}$

Aufgabe H2 Trennung der Variablen

Finden Sie die Lösungen für folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0$, $y(1) = 1$ (b) $y' = y^2 + 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ (c) $y' + y - x^2 = 0$, $y(0) = 10$

LÖSUNG:

(a) $y' = \frac{-(1+x)}{x}y. \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y - \ln y_0 = -x + x_0 - \ln x + \ln x_0 \Rightarrow y(x) = \frac{e^{1-x}}{x}$.

(b) $y' = y^2 + 1 \rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{y} \frac{t'}{1+t^2}\, dt = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctan y + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow y(x) = \tan(x - \frac{\pi}{2})$.

(c) Die Lösung der homogenen DGL $y' + y = 0$ ist $y_h(x) = e^{-x}$. Variation der Konstante c ergibt $c(x) = (k + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$. Es folgt $y(x) = 8e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

Aufgabe H3

Es sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten die DGL $\ddot{\gamma}(t) = -\nabla V(\gamma(t))$.

(a) Zu einer differenzierbaren Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Energie*:

$$E_\gamma(t) := \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + V(\gamma(t)).$$

Zeigen Sie, daß E_γ für jede Lösung γ obiger DGL konstant ist.

(b) Finden Sie alle Lösungen γ obiger DGL im Falle $n = 2$, $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

(c) Versuchen Sie dies in Beziehung zu der Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld ∇V zu setzen. Welche physikalische Bedeutung haben hier die zwei Summanden $\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2$ und V?

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_\gamma = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle + \langle\nabla V(\gamma(t)), \dot{\gamma(t)}\rangle &= \frac{1}{2}\langle\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle + \frac{1}{2}\langle\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}\rangle + \langle\nabla V(\gamma(t)), \dot{\gamma(t)}\rangle \\ &= \langle\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle + \nabla V(\gamma(t)), \dot{\gamma(t)}\rangle \\ &= \langle\ddot{\gamma}(t) + \nabla V(\gamma(t)), \dot{\gamma(t)}\rangle \end{aligned}$$

Ist γ eine Lösung der DGL so verschwindet das Skalarprodukt in der letzten Zeile und die Energie E_γ hängt nicht von t ab.

(b) Im Fall $n = 2$, $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ gilt $\nabla V(x, y) = (4x, 6y)$. Die DGL lautet daher

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1(t) \\ \ddot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4\gamma_1(t) \\ 6\gamma_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit die 2 unabhängigen DGLn $\ddot{\gamma}_1(t) = -4\gamma_1(t)$ und $\ddot{\gamma}_2(t) = -6\gamma_2(t)$. Die Lösungen erhält man analog zur Aufgabe G3 a). Es gilt $\ddot{\gamma}_1(t) = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t$ und $\ddot{\gamma}_2(t) = A_2 \cos \sqrt{6}t + B_2 \sin \sqrt{6}t$.

(c) Der Summand $\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2$ entspricht der kinetischen und der Summand V der potentiellen Energie.