2. Übung zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Eine Lipschitzbedingung)**
Entscheide, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x, y) := x|y|$
2. $f(x, y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$ für alle x
3. $f(x, y) := \arctan(x + y)$, $n = 1$

1. $|f(x,y) - f(x,y')| = |x|\big||y| - |y'|\big| \leq |x||y - y'|$. Also erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung aber keine globale, da $|f(x,y) - f(x,y')| \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ für jede festen $y \neq y'$.

2. Erfüllt keine Lipschitzbedingung. Ist nicht mal stetig.

3. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ ist beschränkt für alle x und y. Also erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung.

A 2 **(Existenzintervalle)**

1. Zeige für das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x^2y^2)\ , \qquad y(1) = 0\ ,$$

im Rechteck $R = \{(x, y)\ :\ |x - 1| \leq 1, |y| \leq 1\}$ betrachtet, dass dieses Problem genau eine Lösung auf dem Intervall $[0, 2]$ besitzt.

2. ^{P} (3 Punkte) Gib ein Intervall I an, so dass das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + 2t, \quad y(0) = 2$$

eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ hat.
Wer findet das größte solche Intervall?

1. Die Funktion $f(x, y) = \sin(x^2y^2)$ ist stetig nach y differenzierbar mit

$$f_y(x, y) = 2yx^2\cos(x^2y^2)\ .$$

Weil $|\cos(z)| \leq 1$ für alle z, ist $|f_y(x,y)| \leq 2|y|x^2 \leq 2 \cdot 1 \cdot 4$ für $(x, y) \in R$, also ist f_y beschränkt, und nach Satz 1.4 ist f Lipschitzstetig auf R. Weiter ist

$$M = \max_{(x,y)\in R} |\sin(x^2y^2)| \leq 1\ ,$$

und also $\varepsilon = \min\{1, 1/M\} = 1$. Folglich existiert nach Satz 1.6 (Picard–Lindelöf) eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[1 - 1, 1 + 1] = [0, 2]$.
2. Wir verwenden Satz 1.6. In diesem Fall ist $n = 1$ und $f(t, y) = y^2 + 2t$. Seien $r = 1$ und $R = 2$. Dann ist $G = (-1, 1) \times (0, 4)$. Da $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ eine stetige Funktion ist, und $\overline{G}$ kompakt ist, erfüllt f auf G eine Lipschitzbedingung bezüglich y. Außerdem ist

$$|f(t, y)| \leq y^2 + 2|t| \leq 4^2 + 2 \cdot 1 = 18 := M$$

für $(t, y) \in G$. Damit erhalten wir

$$\varepsilon = \min\{r, \frac{R}{M}\} = \min\{1, \frac{2}{18}\} = \frac{1}{9}.$$

Also $I = (-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Wegen Satz 1.6 existiert genau eine Lösung $y : (-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}) \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblems.

Die Werte R und r können in diesem Beispiel beliebig gewählt werden. Eine andere Wahl kann zu einem anderen Ergebnis führen, dass auch richtig ist.

A 3 (Picard-Iteration) (5 Punkte)

In $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ zu beliebiger Anfangsbedingung $y(0) = v$ gegeben. Berechne vier Schritte des Iterationsverfahrens nach Picard. Versuche mit Hilfe dieser Iterationsschritte die Lösung zu erraten. Beweise, dass sie es ist.

Das zugehörige Vektorfeld ist

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : y \mapsto Ay \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Formel der Picard-Iteration ist also

$$\begin{aligned} c_0(t) &= v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ c_{k+1}(t) &= v + \int_0^t Ac_k(s)ds. \end{aligned}$$

Wir berechnen die ersten Folgenglieder:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= v + \int_0^t Avds = \begin{pmatrix} v_1 + tv_2 \\ v_2 - tv_1 \end{pmatrix}, \\ c_2(t) &= v + \int_0^t \begin{pmatrix} v_2 - sv_1 \\ -v_1 - sv_2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} v_1 + tv_2 - t^2\frac{v_1}{2} \\ v_2 - tv_1 - t^2\frac{v_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{t^2}{2})v_1 + tv_2 \\ (1 - \frac{t^2}{2})v_2 - tv_1 \end{pmatrix} \\ c_3(t) &= \begin{pmatrix} v_1 + tv_2 - t^2\frac{v_1}{2} - t^3\frac{v_2}{6} \\ v_2 - tv_1 - t^2\frac{v_2}{2} + t^3\frac{v_1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{t^2}{2})v_1 + (t - \frac{t^3}{6})v_2 \\ (1 - \frac{t^2}{2})v_2 - (t - \frac{t^3}{6})v_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erkennen daran den Anfang der Sinus- und der Cosinusreihe und behaupten für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_{2k}(t) &= \begin{pmatrix} v_1 \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} + v_2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \\ v_2 \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} - v_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} \\ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \end{pmatrix} \\ c_{2k+1}(t) &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} \\ \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das kann man mit vollständiger Induktion beweisen.
Es folgt, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ der folgende Grenzwert existiert:

$$c(t) = \lim_{k \to \infty} c_k(t) = \begin{pmatrix} v_1 \cos t + v_2 \sin t \\ v_2 \cos t - v_1 \sin t \end{pmatrix}.$$

Probe: $c(0) = v$,

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -v_1 \sin t + v_2 \cos t \\ -v_2 \sin t - v_1 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} c(t).$$

Also ist der Grenzwert $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tatsächlich die gesuchte Lösung.

A 4 (^{P} Periodische Lösungen) (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Ferner sei f in der ersten Komponente L-periodisch, das heißt

$$f(x + L, y) = f(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Weiterhin gebe es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(x_0 + L) = u(x_0)$. Zeige, dass u L-periodisch ist.

Sei $u_L(x) := u(x + L)$. Die Funktion u_L löst das Problem

$$u_L'(x) = u'(x + L) = f(x + L, u(x + L)) = f(x, u_L(x)), \quad u_L(x_0) = u(x_0 + L) = u(x_0).$$

Da f die Voraussetzungen von Satz 1.5 erfüllt, folgt $u = u_L$ oder $u(x) = u(x + L)$ für alle x.

A 5 **(Die zugehörige Integralgleichung)** (4 Punkte)
Es sei seien (x_0, y_0), R, G, M, L, ε und I wie in Satz 1.6. gegeben. Insbesondere sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig mit

$$\|f(x,y)\|_2 \leq M \quad \text{und} \quad \|f(x,y) - f(x,y')\|_2 \leq L\|y - y'\|_2$$

für alle $(x,y), (x,y') \in G$.

1. Außerdem sei $u : I \to \mathbb{R}^n$ Riemann integrierbar und löse die Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt.$$

   Zeige, dass u stetig differenzierbar ist.

2. Sei nun $u_0 = y_0$ und

$$u_{k+1} := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_k(t))dt.$$

   Zeige, dass (u_k) in $C^1(I)$, das heißt in der Norm $\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = f(x,u), \quad u(x_0) = y_0$$

   konvergiert.

1. *Wenn wir wüssten, dass u stetig ist, dann wüssten wir nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung auch, dass u differenzierbar mit der stetigen Ableitung $f(x, u(x))$ ist. Wir brauchen also nur noch die Stetigkeit von u zu zeigen.*
   Wir können abschätzen

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y f(t, u(t))dt \right| \leq M|x - y|.$$

   Somit ist u Lipschitz stetig, also stetig.

2. *Nach Satz 6.1 wissen wir schon, dass (u_k) gleichmäßig gengen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Wir müssen das gleiche nun für die Folge der Ableitungen zeigen. Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung und Induktion ist jedes u_k stetig differenzierbar und es gilt $u_k'(x) = f(x, u_{k-1}(x))$. Somit können wir rechnen*

$$\begin{aligned} |u_k'(x) - u'(x)| &= |f(t, u_{k-1}(t)) - f(t, u(t))| \\ &\leq L|u_{k-1}(t) - u(t)| \leq L\|u - u_{k-1}\|_\infty \\ &\xrightarrow{k \to \infty} 0. \end{aligned}$$

   Da $L\|u - u_{k-1}\|_\infty$ nicht mehr von t abhängt ist die Konvergenz gleichmäßig, das heißt in $\| \cdot \|_\infty$.