Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/07 24. Oktober 2006

Analysis III

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Lipschitzstetigkeit (Wiederholung)

(a) Was bedeutet Lipschitzstetigkeit?

(b) Welche der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sind stetig bzw. lipschitzstetig?

(i) $f_1(x) = |x|$ (ii) $f_2(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f_3(x) = x^3$

(c) Geben Sie eine stetige Funktion an, die nicht lipschitzstetig ist.

Lösung:

(a) Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *lipschitzstetig*, falls es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x')$ für alle $x, x' \in X$ gilt.

(b) (i) Die Funktion $f_1(x) = |x|$ ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$.

(ii) Die Funktion $f_2(x) = \sqrt{x}$ ist nicht lipschitzstetig.

(iii) Die Funktion $f_3(x) = x^3$ ist nicht lipschitzstetig.

(c) Die Funktionen f_2 und f_3 aus Aufgabe b) sind nicht lipschitzstetig.

Aufgabe G2 Lösungsräume linearer homogener Differentialgleichungen

Definition: Eine *lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung* auf $\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = 0$, wobei y bzw. f eine differenzierbare bzw. stetige reelle Funktion ist.

(a) Überlegen Sie sich, warum eine solche Gleichung linear, homogen bzw. 1. Ordnung heißt.

(b) Wir betrachten Differentialgleichung $y' - y = 0$ auf $\mathbb{R}$.

(i) Ist dies eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung?

(ii) Zeigen Sie, daß für Lösungen f und g auch die Funktionen $-f$, $f + g$ sowie λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ wieder Lösungen der Differentialgleichung sind. Weche algebraische Struktur hat also die Menge aller Lösungen?

(iii) Der Lösungsraum einer linearen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung ist höchstens 1-dimensional. Bestimmen Sie den Lösungsraum obiger Differentialgleichung.

Lösung:

(a) (i) Dies **ist** eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung.

(ii) Es seien f und g Lösungen der Differentialgleichung $y' - y = 0$ auf $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus $f'(x) - f(x) = 0$ folgt $\lambda(f'(x) - f(x)) = (\lambda f)'(x) - (\lambda f)(x) = 0$. Insbesondere ergibt sich für $\lambda = 1$ die Gleichung $(-1)(f'(x) - f(x)) = (-f)'(x) - (-f)(x) = 0$. Weiterhin gilt $(f + g)'(x) - (f + g)(x) = f'(x) - f(x) + g'(x) - g(x) = 0 + 0 = 0$. Somit ist die Menge aller Lösungen der Differentialgleichungen ein reller Vektorraum.

(iii) Aus $y' - y = 0$ folgt $y' = y$. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = e^x$. Weil die Lösungsmenge L einen 1-dimensionalen Vektorraum bildet, ergibt sich

$$L = \{ce^x \mid c \in \mathbb{R}\}$$

.

Aufgabe G3 Der Satz vom lokalen Inversen (Wiederholung)

(a) Wie lautet der Satz vom lokalen Inversen?

(b) Es sei $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(\varphi, r) \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Zeigen Sie, daß f lokal invertierbar ist und bestimmen sie $(f^{-1})'$.

LÖSUNG:

(a) Wie lautet der Satz vom lokalen Inversen?

(b) Die Jacobimatrix von f ist durch

$$J_f(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Determinante dieser Matrix ist $-r$. Da nach Definition für $(\varphi, r) \in \Omega$ immer $r \neq 0$ gilt, ist f lokal invertierbar.

Aus $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ folgt $df^{-1}(f(\varphi, r)) \circ df(\varphi, r) = 1$. Es folgt $J_{f^{-1}}(f(\varphi, r)) = J_f(\varphi, r)^{-1}$. Es ergibt sich

$$J_{f^{-1}}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y & x \\ x\sqrt{x^2 + y^2} & y\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4 Bonbon

Wieviel man von einem Bonbon in einem kurzen Zeitintervall ablutscht, ist zur Länge dieses Intervalls und zur Oberfläche des Bonbons proportional. Nehmen Sie an, daß das Bonbon die Form einer Kugel hat und behält. Stellen Sie eine Differentialgleichung für den Kugelradius auf, und lösen Sie diese. (Benutzen Sie die Formeln für das Volumen und die Oberfläche einer Kugel, die Sie aus der Schule kennen.)

LÖSUNG:

Gesucht ist nach dem Radius $R(t)$ des Bonbons zur Zeit t. Ist λ eine kurze Zeit, so lutscht man zur Zeit t etwa

$$\frac{4}{3}\pi(R(t)^3 - R(t + \lambda)^3) = M\lambda 4\pi R(t)^2$$

des Bonbons ab. Hierbei ist M die Proportionalitätskonstante, sie hängt von der Zusammensetzung des Bonbons und des Speichels ab. Teilt man diese Gleichung durch λ so erhält man nach dem Grenzübergang $\lambda \to 0$ die Differentialgleichung

$$-M4\pi R(t)^2 = \frac{4}{3}\pi(R(t)^3)' = 4\pi R(t)^2 R'(t)$$

oder

$$R'(t) = -M.$$

Sie hat offensichtlich die Lösung $R(t) = M(c-t)$, wobei sich die Konstante c aus dem Radius des Bonbons zur Zeit $t = 0$ berechnen läßt.

Aufgabe G5 Der Satz über implizite Funktionen(Wiederholung)

(a) Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge N der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2(1-x^2) - y^2$.

(c) Auf welche Nullstellen (a,b) in N ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar, d.h. für welche $(a,b) \in N$ gibt es Umgebungen U von a und V von b und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to V$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$?

LÖSUNG:

(a) Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?

(b) Aus $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 = 0$ folgt $x^2(1-x^2) = y^2$. Da y^2 nicht negativ sein kann, muß $x^2 \leq 1$ gelten. Somit ergibt sich

$$N = \{(x, \sqrt{x^2(1-x^2)}) \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, -\sqrt{x^2(1-x^2)}) \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

(c) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$. Somit verschwindet die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall außer an der Stelle $(0,0)$, d.h. man kann dort den Satz über implizite Funktionen anwenden.

Hausübungen

Aufgabe H1 Exponentielles Wachstum

Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, welche überall die Gleichung

$$f'(x) = cf(x)$$

erfüllt. Beweisen Sie $f(x) = f(0) \cdot e^{cx}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $F(x) = f(x)e^{-cx}$.

LÖSUNG:

Ableiten der Hilfsfunktion liefert

$$F'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0.$$

Also ist F konstant, und weil $F(0) = f(0) = A$ ist, folgt $F(x) = A$ für alle x. Multipliziert man diese Gleichung mit e^{cx}, so erhält man die Behauptung.

Aufgabe H2 Banachscher Fixpunktsatz

Es sei V ein Banachraum (z.B. $V = \mathbb{R}^n$) und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V.

(a) Ist $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$ eine Konstante, so gilt für die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ die Ungleichung $|S_m - S_n| \leq q^{n+1} \cdot \frac{1-q^{m-n}}{1-q}$.

(b) Gilt sogar $0 < q < 1$, so ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(c) Gibt es eine Konstante $q \in \mathbb{R}$ mit $\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq q\|x_{k+1} - x_k\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\|x_m - x_n\| \leq |S_{m-1} - S_{n-1}| \cdot \|x_1 - x_0\|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) Gilt sogar $0 < q < 1$ in (c), so konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Beweisen Sie: Ist $f : V \to V$ eine Kontraktion (, d.h. es gibt ein $0 < q < 1$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$), so hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

LÖSUNG:

(a) Ist $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$ eine Konstante und o.B.d.A $m > n$. Für die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ gilt

$$|S_m - S_n| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} q^k\right| = \left|q^{n+1}\sum_{k=0}^{m-n-1} q^k\right| = q^{n+1} \cdot \frac{1-q^{m-n}}{1-q}.$$

(b) Für $0 < q < 1$ und $m > n$ ergibt sich aus a) die Abschätzung $|S_m - S_n| \leq q^{n+1} \cdot \frac{1-q^{m-n}}{1-q} \leq \frac{q^{m+1}}{1-q}$. Mit $\lim_{m\to\infty} q^m = 0$ folgt, daß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) Es sei $q \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq q\|x_{k+1} - x_k\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch Induktion erhält man die Gleichung $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k\|x_1 - x_0\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen o.B.d.A. $m > n$ an. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x_m - x_n\| = \left\|\sum_{k=n}^{m-1} x_{k+1} - x_k\right\| \leq \sum_{k=n}^{m-1}\|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k\|x_1 - x_0\| = |S_{m-1} - S_{n-1}| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

(d) Gilt sogar $0 < q < 1$ in (c), so ist die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Damit ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert somit (, denn V ist ein Banachraum).

(e) Es sei $f : V \to V$ eine Kontraktion und $x_0 \in V$. Wir betrachten die Folge $x_n = f^n(x)$. Da f eine Kontraktion ist, gibt es eine Konstante $0 < q < 1$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$. Insbesondere gilt damit auch

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| = \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \leq q\|x_{k+1} - x_k\|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Punkt $x \in V$. Da f stetig ist, ergibt sich

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Somit ist x ein Fixpunkt von f. Ist $y \in V$ ein weiterer Fixpunkt von f, so folgt $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$, d.h. $\|x - y\| = 0$ bzw. $x = y$. Daher kann es nur einen Fixpunkt geben.

Aufgabe H3 Lösungsräume linearer homogener Differentialgleichungen

Definition: Eine *lineare homogene Differentialgleichung n. Ordnung* auf $\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$, wobei y eine n-mal differenzierbare Funktion und die a_i stetige reelle Funktionen sind.

(a) Überlegen Sie sich, warum eine solche Gleichung linear, homogen bzw. n. Ordnung heißt.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge aller Lösungen einer solchen Differentialgleichung einen Vektorraum bilden.

LÖSUNG:

Siehe aufgabe G2.