11. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

Das Maximum Prinzip

Aufgaben

A 1 Sei G ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G holomorph ist. Weiterhin gebe es ein $c \geq 0$, so dass gilt $|f(z)| = c$ auf ∂G.
Zeige: Hat f keine Nullstelle in G, so ist f konstant.

Angenommen f hat keine Nullstelle in G. Da nach dem Minimum- und dem Maximumprinzip sowohl das Minimum als auch das Maximum vom $|f|$ auf dem Rand von G liegen, gilt $|f(z)| = c$ auf ganz G. Wir schreiben

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$

mit reellen Funktionen u und v. Also ist $|f|$ konstant. Nach Blatt 8, A6 sind wie fertig.

Der Vollständigkeit halber folgt jetzt nochmal der Beweis. Mit Hilfe der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen sieht man

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial x} f\overline{f} &= f\frac{\partial}{\partial x}\overline{f} + \overline{f}\frac{\partial}{\partial x} f = Re(\overline{f}\frac{\partial}{\partial x} f) = u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial x}v \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y} f\overline{f} &= f\frac{\partial}{\partial y}\overline{f} + \overline{f}\frac{\partial}{\partial y} f = Re(\overline{f}\frac{\partial}{\partial y} f) = u\frac{\partial}{\partial y}u + v\frac{\partial}{\partial y}v = -u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial x}u \end{aligned}$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit u und die untere mit v und addiert man sie, so erhält man

$$0 = u^2\frac{\partial}{\partial x}u + v^2\frac{\partial}{\partial x}u = |f|^2\frac{\partial}{\partial x}u.$$

analog erhält man $\frac{\partial}{\partial y}u = 0$. Somit ist u konstant. Also ist auch $v^2 = |f|^2 - u^2$ kontant. Da v stetig und reell ist, ist auch v und somit f konstant.

A 2 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Zeige, dass für jedes $c > 0$ der Abschluss der Menge $\{z \mid |f(z)| < c\}$ die Menge $\{z \mid |f(z)| \leq c\}$ ist.

$$\overline{\{z \mid |f(z)| < c\}} \subset \{z \mid |f(z)| \leq c\}$$

ist klar. Sei also $\zeta \in \{z \mid |f(z)| \leq c\}$. OBdA können wir annehmen, dass $|f(\zeta)| = c$ ist. Angenommen $\zeta \notin \overline{\{z \mid |f(z)| < c\}}$. Dann gibt es eine Umgebung U von ζ mit $|f(z)| \geq c = |f(\zeta)| \neq 0$. Also ist ζ ein lokales Minimum vom $|f|$. Es folgt $f = 0$. Widerspruch.

A 3 **Definition:** Eine Zusammenhangskomponente U einer Menge M ist eine zusammenhängende Teilmenge von M, so dass für jede zusammenhängende Menge V mit $U \subset V \subset M$ gilt $U = V$.

(a) Skizziere (grob, ohne zu rechnen die Mengen) $\{z \mid |z||1 - z| < c\}$ für $c = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{4}$ und $c = 1$. Bestimme anhand der Zeichnung die Zusammenhangskomponenten der Menge.

(b) Sei p ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass jede Zusammenhangskomponente von der Menge $\{z \mid |p(z)| < c\}$ eine Nullstelle von p enthält.

(c) Sei wieder p ein nichtkonstantes Polynom. Weiterhin sei c so gewählt, dass $p'(z) \neq 0$ für alle z mit $|p(z)| = c$ gilt (Da p' nur endlich viele Nullstellen hat, ist dies keine große Einschränkung). Zeige, dass $\{z \mid |p(z)| = c\}$ die Vereinigung von endlich vielen geschlossenen C^∞-Pfaden ist. Diskutiere das Verhalten dieser Pfade für $c \to \infty$.

(a)

(b) *Da p ein Polynom ist, ist $\{z \mid |f(z)| < c\}$ für jedes $c > 0$ beschränkt. Sei U eine Zusammenhangskomponente von $\{z \mid |p(z)| < c\}$.*
Wir zeigen:

$$\begin{aligned}\partial U &\subset \partial\{z \mid |p(z)| < c\} \\ &= \{z \mid |p(z)| \leq c\} \setminus \{z \mid |p(z)| < c\} = \{z \mid |p(z)| = c\}.\end{aligned}$$

Sei $\zeta \in \partial U$. Wegen

$$\overline{U} \subset \overline{\{z \mid |p(z)| < c\}}$$

genügt es zu zeigen, dass ζ kein innerer Punkt von $\{z \mid |p(z)| < c\}$ ist. Wäre dies jedoch der Fall, so gäbe es eine Umgebung V von ζ, so dass $V \subset \{z \mid |p(z)| < c\}$. Diese Menge V ist oBdA wegzusammenhängend und enthält wenigstens einen Punkt von U. Also ist

$$U \cup V \subset \{z \mid |p(z)| < c\}$$

wegzusammenhängend. Daraus folgt $U \cup V \subset U$ und ζ ist innerer Punkt von U. Widerspruch.
Wegen $|p(z)| = c$ auf ∂U folgt nun aus T1, da p nicht konstant ist, dass es in U eine Nullstelle von p geben muß.

(c) *Die Menge $\{z \mid |p(z)| = c\}$ ist nach (a) der Rand der Menge $\{z \mid |p(z)| < c\}$. Da p nur endlich viele Nullstellen hat, hat $\{z \mid |p(z)| < c\}$ nach (b) nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Also ist $\{z \mid |p(z)| = c\}$ die Vereinigung der Ränder dieser Zusammenhangskomponenten. Dass der Rand einer Zusammenhangskomponente geschlossen ist, ist klar. Wir müssen nur noch zeigen, dass er sich durch eine C^∞- Kurve parametrisieren läßt.*
Wie in T1 zeigt man, dass aus $\frac{d}{dx}|p(x+iy)|^2 = 0$ und $\frac{d}{dy}|p(x+iy)|^2 = 0$ folgt $\frac{d}{dz}p(x+iy) = 0$. Also können nach unserer Voraussetzung $\frac{d}{dx}|p(x+iy)|^2$ und $\frac{d}{dy}|p(x+iy)|^2$ nicht gleichzeitig Null sein, falls $|p(x+iy)| = c$ ist.
Nach dem Satz über implizite Funktionen kann man folglich die Gleichung $|p(x+iy)|^2 = c^2$ in einer Umgebung jedes Punktes von $\{z \mid |p(z)| = c\}$ nach x oder nach y duch eine C^∞-Funktion $\varphi_z : I_z \to J_z$ auflösen. Es folgt, dass die kompakte Menge $\{z \mid |p(z)| = c\}$ von den Mengen $I_z \times J_z$ überdeckt wird. Folglich genügen endlich viele socher φ_z's um die Menge $\{z \mid |p(z)| = c\}$ zu parametrisieren. Also ist $\{z \mid |p(z)| = c\}$ eine C^∞-Kurve.
Für $c \to \infty$ vereinigen sich die Kurven bis es schließlich nur noch eine ist, die immer größer wird.