Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Martin Fuchssteiner
Katrin Krohne

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006 9. Januar 2007

Analysis III

10. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Zusammenhang

Definition: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, $(X \subset \mathbb{C})$ heißt *lokal-konstant*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt so daß $f_{|U}$ konstant ist.

(a) Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Jede lokal-konstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.
2. Für jede nicht leere, offene und abgeschlossene Teilmenge A von X gilt $A = X$.

(b) Eine Teilmenge X von $\mathbb{C}$, welche obige Eigenschaften hat, nennt man *zusammenhängend*. Skizziere jeweils exemplarisch eine zusammenhängende Teilmenge und eine Teilmenge, die nicht zusammenhängend ist.

Lösung:

(a) $(1 \Rightarrow 2)$ Da sowohl A als auch $X \setminus A$ offen sind ist die charakteristische Funktion χ_A von A lokal konstant und somit konstant. Da A nicht leer ist, kann χ_A nicht 0 sein, somit folgt $\chi_A = 1$, d.h. $A = X$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sei $f : X \to \mathbb{C}$ lokal-konstant und $p \in X$. Die Menge $A = f^{-1}(f(p))$ ist nicht leer und auch offen, weil f lokal konstant ist. Weil f auch stetig ist, ist A abgeschlossen. Es folgt $A = X$, d.h. $f(x) = f(c)$ für alle $x \in X$.

(b)

(T 2) Wegzusammenhang und Zusammenhang I

Definition: Eine Teilmenge X von $\mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x \in X$ und $y \in X$ einen Weg von x nach y in X gibt.

(a) Ist die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ wegzusammenhängend?

(b) Skizziere jeweils exemplarisch eine offene wegzusammenhängende Teilmenge und eine offene Teilmenge, die nicht wegzusammenhängend ist.

(c) Sind wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ zusammenhängend?

(d) Suche ein Beispiel einer zusammenhängenden aber nicht wegzusammenhängenden Menge.

Lösung:

(a) Die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ ist wegzusammenhängend, da mit je 2 Punkten c_1 und c_2 auch der Weg $t \mapsto (1-t)c_1 + tc_2$ in $\mathbb{E}$ liegt.

(b) $B_1(0)$,$B_1(0) \cup B_1(5)$

(c) Wegzusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind zusammenhängend: Angenommen X ist wegzusammenhängend und $f : X \to \mathbb{C}$ eine lokal-konstante Funktion auf X, dann ist für jeden Weg γ in X auch die Funktion $f \circ \gamma$ lokal-konstant (Wieso?). Weil das Einheitsintervall I zusammenhängend ist, muß daher $f \circ \gamma$ konstant sein. Weil dies für jeden Weg γ in X gilt und X wegzusammenhängend ist, muß f auch auf X konstant sein.

(d) Ein Beispiel ist $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid (-1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

(T 3) Wegzusammenhang und Zusammenhang II

Im folgenden sei D eine offene nicht leere Teilmenge von $\mathbb{C}$ (d.h. ein *Bereich*) und $p \in D$ ein Punkt aus D. Wir definieren eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls es einen Weg von } c \text{ nach } z \text{ in } D \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Beweise, daß f lokal-konstant ist.

(b) Zeige, daß zusammenhängende Bereiche wegzusammenhängend sind.

Lösung:

(a) Da D offen ist, gibt es zu jedem Punkt $z \in D$ eine offene Kreisscheibe $B_\epsilon(z)$, welche in D liegt. Weil diese Kreisscheibe wegzusammenhängend ist, folgt $f(z) = f(B_\epsilon(z))$. Somit ist f lokal-konstant.

(b) Weil die Funktion f auf einem zusammenhängenden Bereich D konstant sein muß und $f(p) = 1$ gilt, muß $f(D) = 1$ gelten. Somit ist D wegzusammenhängend.

(T 4) Gebiete

Definition: Ein zusammenhängender Bereich heißt *Gebiet*.

(a) Sind Gebiete offen oder wegzusammenhängend?

(b) Untersuche folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ darauf, ob sie zusammenhängend, wegzusammenhängend, Bereiche oder Gebiete sind:

(i) Die Halbebene $\mathbb{H}$ (ii) $B_1(-1) \cup B_1(1)$ (iii) Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{E}}$
(iv) $B_1(0) \setminus \{0\}$ (v) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (vi) $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$

Lösung:

(a) Da Gebiete (zusammenhängende) Bereiche sind, sind sie offen. Weil sie offen und zusammenhängen sind, sind sie auch wegzusammenhängend.

(b)
1. Die Halbebene $\mathbb{H}$ ist offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet (und insbes. ein Bereich).
2. $B_1(-1) \cup B_1(1)$ ist nicht leer und offen, aber nicht wegzusammenhängend, also ein Bereich aber kein Gebiet.
3. Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{E}}$ ist wegzusammenhängend aber nicht offen, also weder ein Gebiet noch ein Bereich.
4. $B_1(0) \setminus \{0\}$ ist offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet (und insbes. ein Bereich).
5. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet (und insbes. ein Bereich).

6. $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ ist zwar wegzusammenhängend aber nicht offen, also weder ein Bereich noch ein Gebiet.

(T 5) Sterngebiete

Definition: Ein Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ mit $p \in \Omega$ heißt *sternförmig bezüglich* p, wenn für alle $z \in \Omega$ das Geradenstück $p + [0,1] \cdot (z - p)$ in Ω liegt.

(a) Mache Dir eine exemplarische Skizze eines sternförmigen Menge.

(b) Sind sternförmige Mengen wegzusammenhängend?

(c) Sind sternförmige Mengen Bereiche oder Gebiete?

(d) Sind offene sternförmige Mengen Bereiche oder Gebiete?

(e) Untersuche die Teilmengen aus Aufgabe 3 darauf, ob sie sternförmig sind. Sind Sie sternförmige Gebiete?

LÖSUNG:

(a) Ein Beispiel ist $B_1(0)$.

(b) Ja, denn für alle $z \in \Omega$ liegt der Weg $t \mapsto (1-t)p + tz$ in Ω

(c) Sind sternförmige Mengen wegzusammenhängend?

(d) Nein, denn sie müssen nicht notwendigerweise offen sein.

(e) Ja, denn sie sind offen und wegzusammenhängend.

(f)
1. Die Halbebene $\mathbb{H}$ ist sternförmig bez. $p = i$, also ein sternförmiges Gebiet.
2. $B_1(-1) \cup B_1(1)$ ist nicht sternförmig.
3. Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{E}}$ ist sternförmig aber kein Gebiet.
4. $B_1(0) \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.
5. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist nicht sternförmig.
6. $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ ist nicht sternförmig.

(T 6) Homotope Wege

Gegeben seien die beiden geschlossenen Kurven $\varphi_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $i = 0, 1$

$$\varphi_0(t) = 2e^{it} + 3, \qquad \varphi_1(t) = e^{it} - 1.$$

(a) Geben Sie eine Homotopie $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ im Sinne von Definition 2.5 an, so daß $H(t, 0) = \varphi_0(t)$ und $H(t, 1) = \varphi_1(t)$ gilt.

(b) Skizzieren Sie die Kurven $H(-, 0)$,$H(-, \frac{1}{4})$,$H(-, \frac{1}{2})$,$H(-, \frac{3}{4})$ und $H(-, 1)$.

LÖSUNG:

(a) $H(t, s) = ((1-t)2 + t)e^{it} + ((1-t)3 - t) = (2-t)e^{it} + (3 - 4t)$.

(b) Siehe Lenrzentrumsordner.

(T 7) Homotopie

Gegeben seien die folgenden Kurven in $\varphi_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$

$$a)\ \gamma_1(t) = e^{it}, \quad b)\ \gamma_2(t) = e^{2it} + 5, \quad c)\ \gamma_3(t) = \frac{1}{|\sin t| + |\cos t|} e^{it}.$$

Zeichnen Sie diese Kurven und entscheiden sie anschaulich (ohne mathematischen Beweis), welche der Kurven homotop sind und welche nicht.

LÖSUNG:

Die Wege γ_1 und γ_3 sind mittels

$$H(t,s) = \left(\frac{1-s}{|\sin t| + |\cos t|} + s \right) e^{it}$$

homotop. Der Weg γ_2 ist zu den beiden nicht homotop, da diese Kurve die Null nicht umschließt. Für die Zeichnungen siehe LZM-Ordner.

(T 8)

Zeichnen Sie eine Möglichkeit, ein Bild mit zwei Nägeln so aufzuhängen, dass es hängen bleibt, solange beide Nägel in der Wand sind. Jedoch soll es herunterfallen, sobald einer der Nägel entfernt wird.

LÖSUNG:

Siehe Lernzentrumsordner oder Conway: ,,Functions of one Complex Variable”