# 9. Tutorium zur Analysis III, Lösungsvorschlag

## Die Riemannsche Zahlenkugel

## Aufgaben

**A 1** Wir betrachten die Sphäre $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und identifizieren $\mathbb{C}$ durch die Abbildung

$$z = x + iy \longmapsto (x, y, 0) \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$$

mit der Äquatorialebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$. Den Punkt $e_3 = (0, 0, 1) \in S$ nennen wir den *Nordpol*, und $\mathbb{C}$ ergänzen wir durch $\infty \notin \mathbb{C}$ zu $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die *stereographische Projektion*

$$\pi \colon S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

wird folgendermaßen definiert: Es ist $\pi(e_3) := \infty$, und für $x \in S \setminus \{e_3\}$ ist $\pi(x)$ der Schnittpunkt der Äquatorialebene $\mathbb{C}$ mit der Verbindungsgeraden von $x$ und $e_3$. In diesem Zusammenhang heißt $S$ auch die *Riemannsche Zahlenkugel*.

(a) Skizzieren Sie die Lage von $S$ und $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}^3$ und die Abbildung $\pi$.

(b) Erklären Sie anschaulich, dass $\pi$ bijektiv ist. Zeigen Sie, daß für $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{e_3\}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die Formeln

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad \text{und} \quad \pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

gelten.

*(b) Zur Bijektivität von $\pi$ sei nur bemerkt, dass für $z \in \mathbb{C}$ das Urbild $\pi^{-1}(z)$ der (vom Nordpol verschiedene) Schnittpunkt von $S$ mit der Geraden durch $z$ und $e_3$ ist.*

*Für $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$ gilt wegen des Strahlensatzes:*

$$z \;=\; \frac{z}{1} = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3};$$

*Die Umkehrfunktion erhält man wie folgt:*

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2}.$$

*Wegen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (x liegt auf der Sphäre) erhält man*

$$|z|^2 = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2}.$$

*Löst man diese Gleichung nach $x_3$ auf, so erhält man $x_3 = \frac{|z|^2 \pm 1}{|z|^2 + 1}$. Da $x_3 = 1$ nur für $z = \infty$ möglich ist, folgt die Behauptung für $x_3$. Wegen $x_1^2 + x_2^2 = 1 - \frac{(|z|^2 - 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2}$ gilt $|x_1 + ix_2| = \frac{2|z|}{|z|^2 + 1}$. Da die Richtung von $x_1 + ix_2$ die gleiche wie die von $z$ ist, gilt*

$$x_1 + ix_2 = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{2|z|}{|z|^2 + 1} = \frac{2z}{|z|^2 + 1}.$$

*Das ist die Behauptung für $x_1$ und $x_2$.*
*Alternativ kann man mit der richtigen Zeichung rechnen:*

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \frac{z}{|z|} \cdot \sin 2\alpha = \frac{2z}{|z|} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{2z}{|z|} \cdot \frac{|z|}{(\sqrt{|z|^2 + 1})^2} = \frac{2z}{|z|^2 + 1}; \\ x_3 &= \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \end{aligned}$$

*Also $\pi^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$.*

**A 2** Wir definieren, was offene Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ sind:
Ist $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ so heißt $\infty$ innerer Punkt von $U$, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset U.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ sind innere Punkte im üblichen Sinne definiert. $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen, falls alle Punkte innere Punkte sind.
Zeige: Mit dieser Defnition ist $\hat{\mathbb{C}}$ überdeckungskompakt, das heißt: Ist $\mathfrak{U}$ ein System offener Mengen und

$$\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U,$$

so gibt es endlich viele $U_1, ..., U_N \in \mathfrak{U}$ mit $\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=1}^N U_i$.

*Es muß ein $U \in \mathfrak{U}$ geben mit $\infty \in U$. Setze $U_1 := U$. Da $U$ offen ist, ist $\infty$ innerer Punkt von $U$ und es gibt ein $R > 0$ so daß $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset U$. Nun wird die kompakte Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ von den Mengen $U \in \mathfrak{U}$ überdeckt. Also genügen endlich viele $U_2, ..., U_N \in \mathfrak{U}$, um $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ zu überdecken. Somit gilt $\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=1}^N U_i$ und wir haben eine endliche Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$ gefunden.*

**A 3** Verwenden Sie zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben die Notationen und Definitionen aus A1.

(a) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die $S$ in mehr als einem Punkt schneidet. Zeige, daß das Bild $\pi(E \cap S)$ für $e_3 \in E$ eine Gerade und für $e_3 \notin E$ ein Kreis ist. (Man stellt $E$ wohl am besten in Hessescher Normalform dar.)

(b) Zeige, daß jede Gerade und jeder Kreis in $\mathbb{C}$ wie in Teil (a) entsteht.

*(a) Es sei $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt dann*

$$z \in \pi(E \cap S) \Leftrightarrow \pi^{-1}(z) \in E \Leftrightarrow 2a_1x + 2a_2y + a_3(x^2 + y^2 - 1) = b(x^2 + y^2 + 1)\,. \tag{1}$$

*Fall $e_3 \in E$: Dann $a_3 = b$, somit*

$$x + iy \in \pi(E \cap S) \Leftrightarrow a_1x + a_2y = b\,. \tag{2}$$

*Da weiter $\pi(e_3) = \infty$, ist dann also $\pi(E \cap S)$ die durch (2) beschriebene Gerade, zusammen mit dem Punkt $\infty$.*

*Fall $e_3 \notin E$: Dann ist $a_3 \neq b$. Der Abstand von $E$ zu 0 ist $\frac{b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$; da $|E \cap S| > 1$, muss der Abstand $< 1$ sein. Es ist also $b^2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Die letzte der in (1) beschriebenen äquivalenten Bedingungen können wir nun umschreiben: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned} z \in \pi(E \cap S) \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + y^2 + 2\frac{a_1}{a_3 - b}x + 2\frac{a_2}{a_3 - b}y - \frac{a_3 + b}{a_3 - b} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = \left(x + \frac{a_1}{a_3 - b}\right)^2 + \left(y + \frac{a_2}{a_3 - b}\right)^2 - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b^2}{(a_3 - b)^2}\,. \end{aligned}$$

*Es ist daher $\pi(E \cap S)$ der Kreis um $\frac{a_1+ia_2}{b-a_3}$ mit Radius $\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-b^2}}{|b-a_3|}$.*

*(b) Gegeben einen Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$, wählen wir darauf drei verschiedene Punkte $z_1$, $z_2$, $z_3$. Wir finden dann eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, welche die drei Punkte $\pi^{-1}(z_1)$, $\pi^{-1}(z_2)$ und $\pi^{-1}(z_3)$ enthält. Dann ist $\mathbb{C} \cap \pi(E \cap S)$ ein Kreis (bzw. eine Gerade) und enthält die Punkte $z_1$, $z_2$, $z_3$. Da sich durch drei gegebene verschiedene Punkte in $\mathbb{C}$ entweder genau ein Kreis, oder genau eine Gerade legen lässt, muss $\pi(S \cap E) \cap \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Kreis (bzw. der gegebenen Geraden) übereinstimmen.*